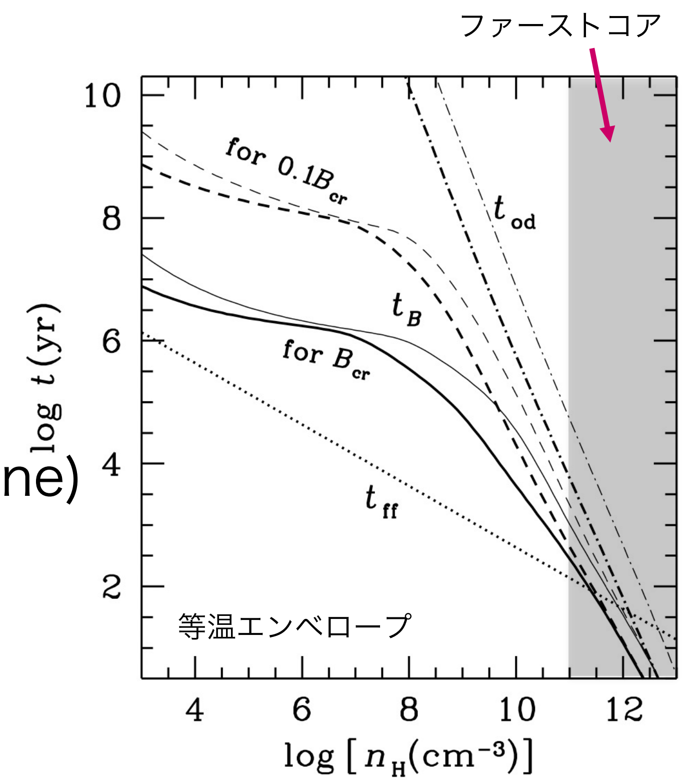
自己重力MHD

松本倫明（法政大学人間環境学部）

なぜMHDか？（とくに星形成）

- 宇宙のガスのほとんどがプラズマ ➡ MHD
- 星形成は分子雲でおきる。
- 分子雲内はほぼ中性
  - 電離度 10^{-7} 程度。弱電離。
  - 自由落下時間< 磁場の拡散 ➡ MHD
- 原始惑星系円盤
  - オーム散逸が効く
  - 赤道面に電離度が小さい領域 (dead zone)
  - それ以外はMHD
- 星の近傍
  - 電離度が大きい ➡ MHD

再掲



Nakano+ 2002 doi:10.1086/340587

なぜ自己重力か？

- 中心天体 + 円盤（e.g., BH + disk)
  - 中心天体の質量 >> 円盤の質量 ➡ 点源重力
  - それ以外 ➡ 自己重力
- 自己重力が効く場合
  - 系の大きさ > ジーンズ長
  - 宇宙大規模構造、銀河団・銀河形成、銀河円盤、分子雲、星形成、星周円盤（連星形成、渦状腕形成）、惑星形成（重力不安定による）

普通の学習法　ロードマップ

みなさんはいまどの段階ですか？

線形移流方程式（線形波動方程式）スカラー・１次元・１次精度

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

オイラー方程式（流体力学）

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} = 0$$

高次精度化

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} = O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2)$$

多次元化

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial z} = 0$$

MHD方程式

ローレンツ力を導入

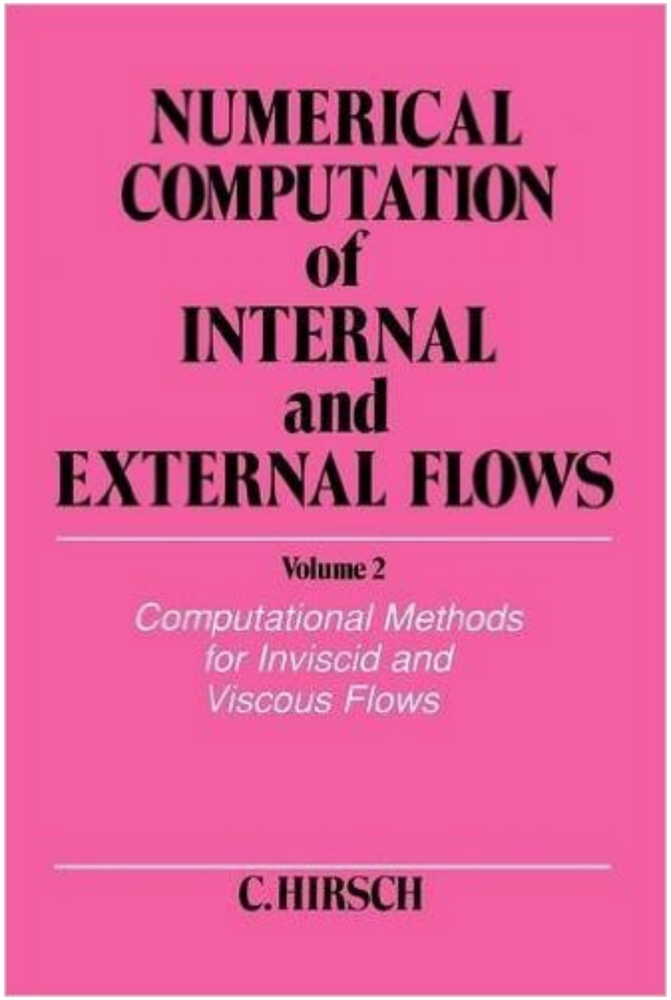
ポアソン方程式（自己重力）

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$$

自己重力MHD方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial z} = \boldsymbol{g}$$

お勧めのテキスト



Numerical Computation of Internal and External Flows, Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows

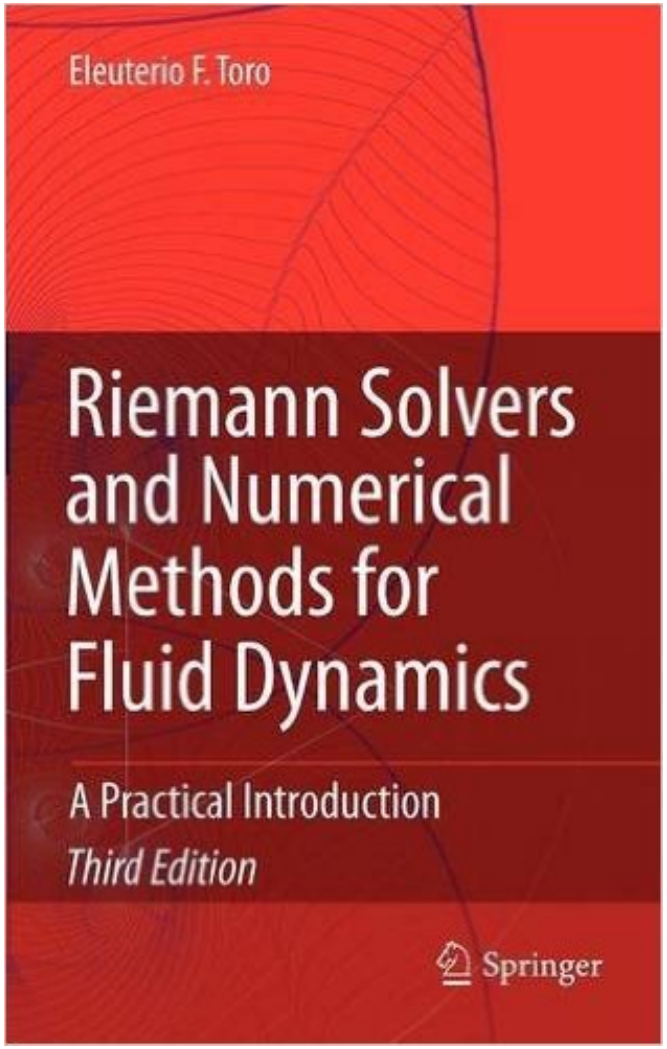
(Wiley Series in Numerical Methods in Engineering) (英語) ペーパーバック

1990/4

Charles Hirsch (著)

ピンク本と称される最強の教科書。
最強に分厚い。厚み4cm。

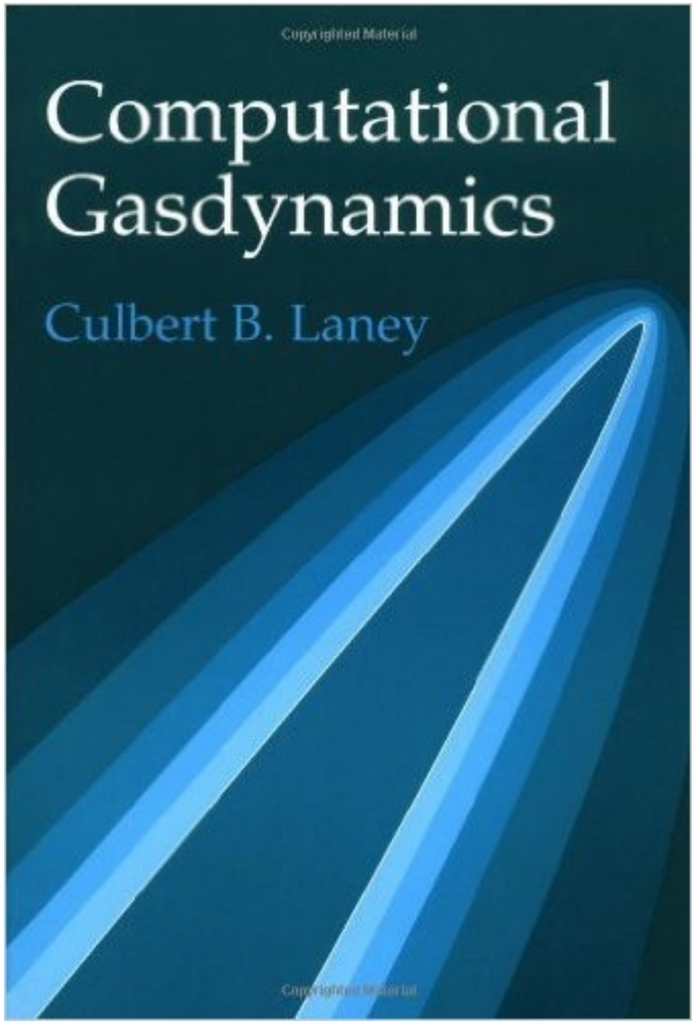
お勧めのテキスト



Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction (英語) ハードカバー　2009/4/27
Eleuterio F. Toro (著)

リーマン解についての教科書
HLL系が好きなよう。

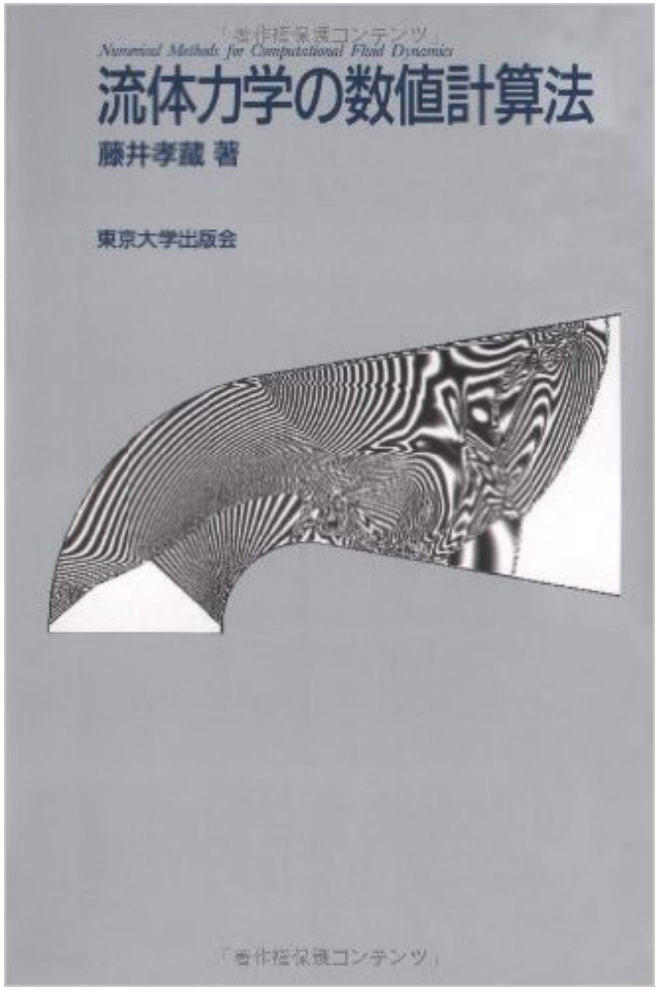
お勧めのテキスト



Computational Gasdynamics (英語)
ペーパーバック 1998/6/13
Culbert B. Lan

あると嬉しいかな。

お勧めのテキスト



流体力学の数値計算法 単行本　1994/4
藤井 孝蔵 (著)

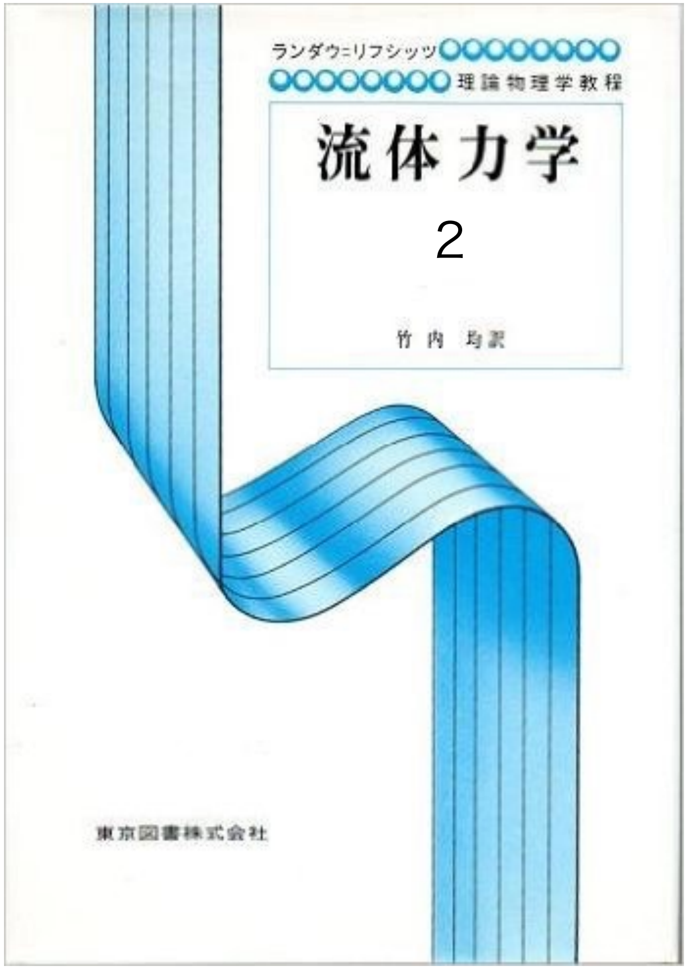
日本語の圧縮性流体力学の数値解法で一番良い本。ただし説明が簡素。

お勧めのテキスト

シミュレーション天文学 (シリーズ現代の天文学) 単行本　2007/8
富阪 幸治 (編さん), 花輪 知幸 (編集), 牧野 淳一郎 (編集)

政治的な理由により、お勧めする。

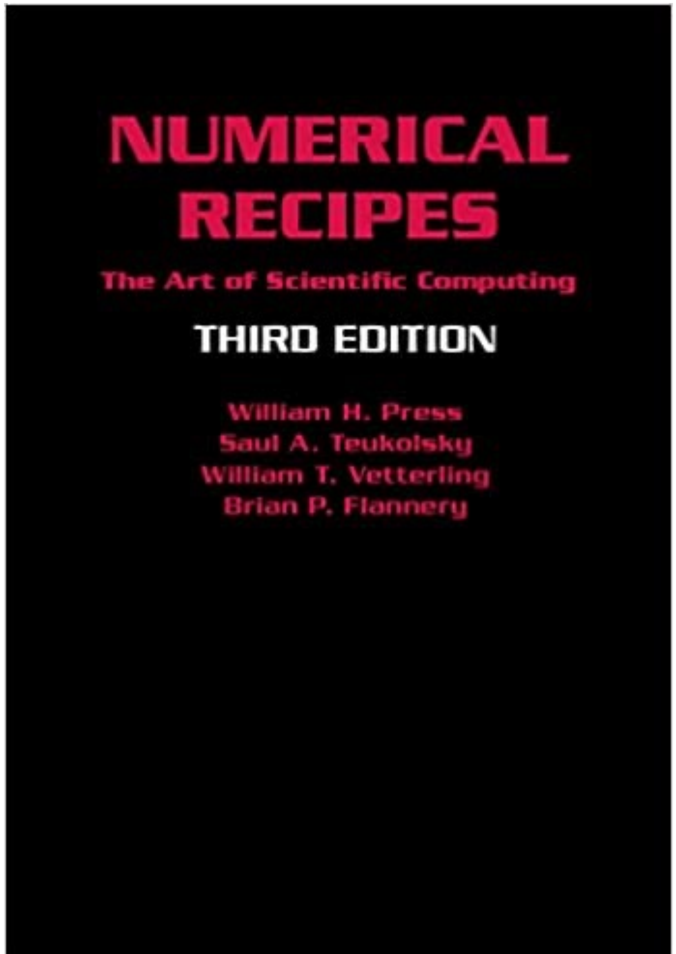
お勧めのテキスト



流体力学 2 (ランダウ=リフシッツ理論物理学教程) 単行本 1971/11
エリ・ランダウ (著), イェ・リフシッツ (著), 竹内 均 (翻訳)

流体力学についていろいろ書いてある。
絶版になった。残念。

お勧めのテキスト



Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing
William H. Press (著), Saul A. Teukolsky (著), William T. Vetterling (著), Brian P. Flannery (著)

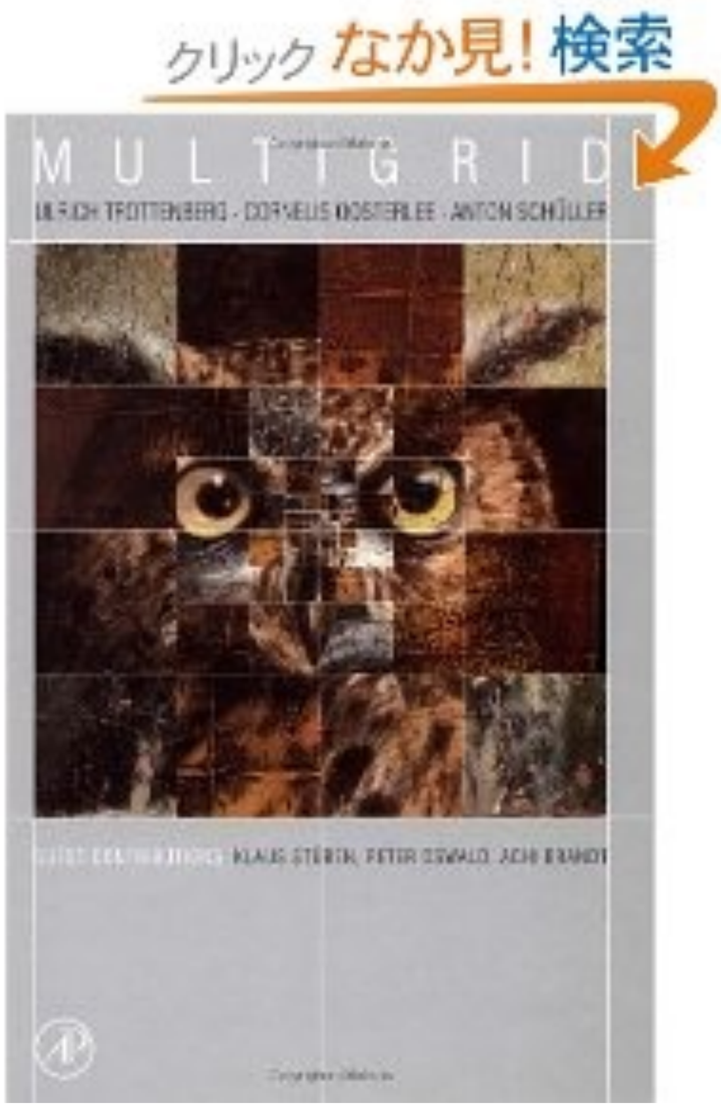
マルチグリッド法の節がおすすめ。
たった10数ページにエッセンスが凝縮。
Second edition 以降であればOK。

私はComputers in Physics に掲載された FORTRAN77 版で勉強した（花輪さんに読まされた）。
PDF がダウンロードできる！

Multigrid Methods for Boundary Value Problems. I.
William H. Press and Saul A. Teukolsky
Computers in Physics **5**, 514 (1991); https://doi.org/10.1063/1.4823014

Multigrid Methods for Boundary Value Problems. II
William H. Press and Saul A. Teukolsky
Computers in Physics **5**, 626 (1991); https://doi.org/10.1063/1.4823031

お勧めのテキスト



マルチグリッド法の数少ない良書
自己重力の解法でお世話になる。

Multigrid [ハードカバー]

Ulrich Trottenberg (著), Cornelius W. Oosterlee (著), Anton Schuller (著)

花輪さんが持っているのを見た。

流体力学

流体 = ガス

圧縮性流体 vs 非圧縮性流体

出典： https://www.youtube.com/watch?v=XRJx1ba_6DE

出典：気象庁

圧縮性流体	非圧縮性流体
$\nabla \cdot \boldsymbol{v} \neq 0$	$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$
超音速	亜音速

板書

圧縮性流体を使う人は

- ジェット機を作る人
- ロケットを作る人
- 爆弾を作る人
- 天文学者

- 圧縮性の磁気流体力学(MHD)を使う人は・・・

衝撃波による爆縮

出典：NHK

ザク　大気圏突入（機動戦士ガンダム）　衝撃波による加熱

偏微分方程式の分類

双曲型

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

波動方程式
オイラー方程式（流体力学方程式）
→ 移流方程式
→ダランベールの解

板書

放物型

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

熱伝導方程式

楕円形

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho$$

ポアソン方程式
ラプラス方程式
静電場
重力場

偏微分方程式の分類

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cdots$$

$$B^2 - 4AC = \begin{cases} > 0 & \text{hyperbolic PDE} \\ = 0 & \text{parabolic PDE} \\ < 0 & \text{elliptic PDE} \end{cases}$$

偏微分方程式の分類

双曲型

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

時間発展型　初期値問題
初期条件＋境界条件

放物型

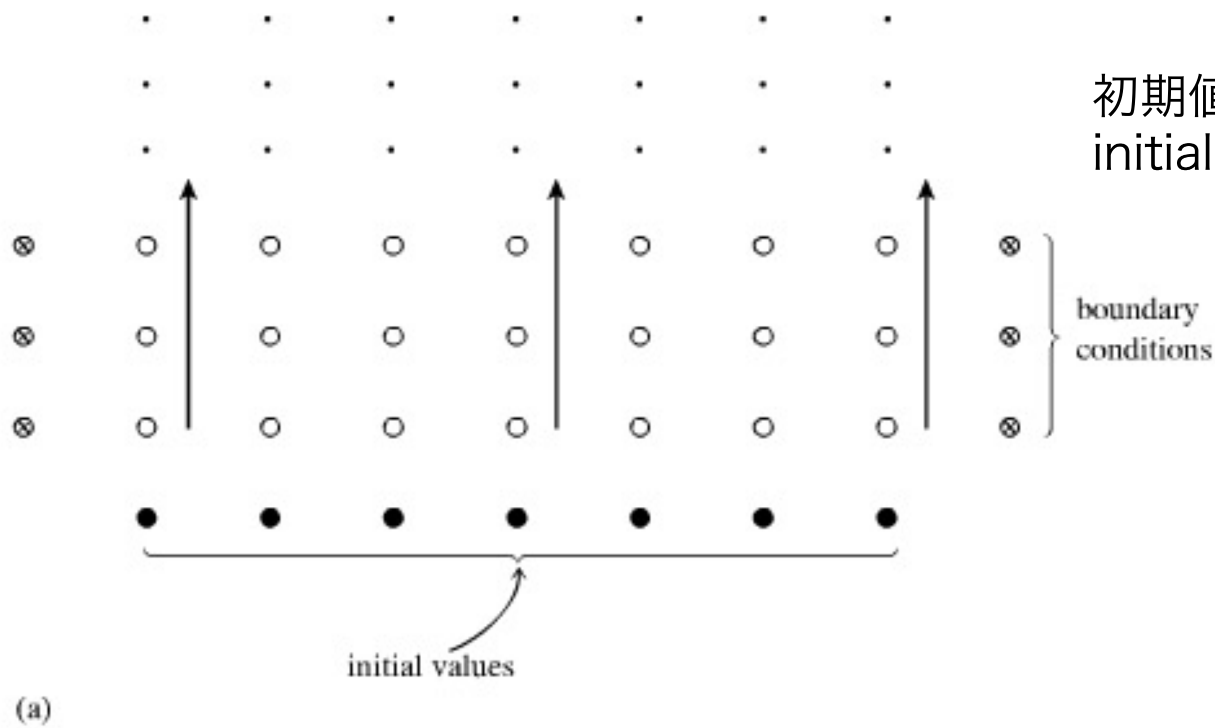
$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

時間発展型　初期値問題
初期条件＋境界条件

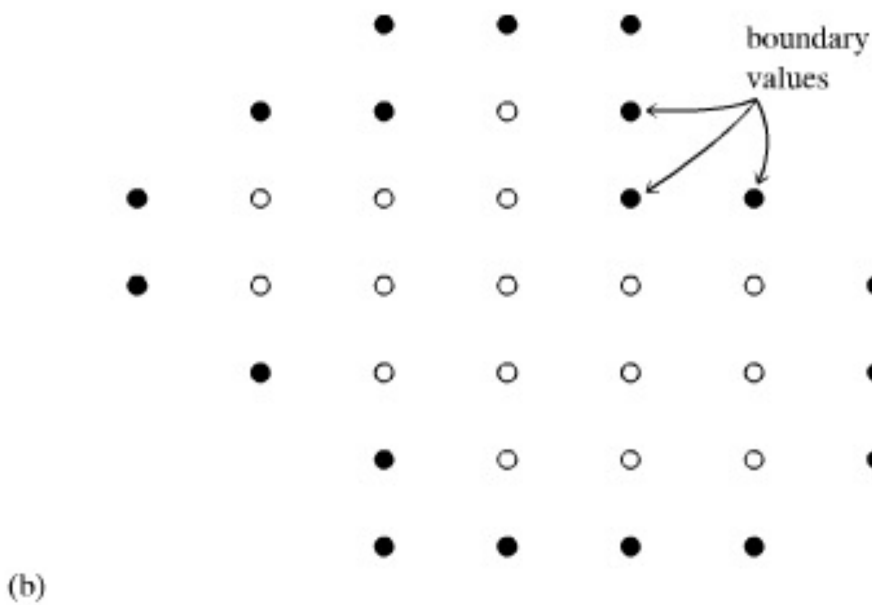
楕円形

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho$$

境界値問題
境界条件



初期値問題
initial value problem



境界値問題
boundary value problem

出典：　Numerical recipes

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{c}\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$$ ローレンツ力

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \cancel{\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}$$

マックスウェル方程式（アンペールの法則）
非相対論で変位電流を無視

$$= \frac{1}{4\pi}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\nabla B^2 + \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$ 磁気圧勾配＋磁気張力

$$= -\nabla \cdot \left(\frac{B^2}{8\pi}\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T}{4\pi} \right) - \cancel{\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{B})}$$

磁気圧勾配　磁気張力

誘導方程式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \cancel{\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}$$

マックスウェル方程式

$$\boldsymbol{J} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)$$

オームの法則

$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{J}$ を消去すると

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \boldsymbol{B})$$

理想MHDの誘導方程式

オーム散逸

ただし $\eta = \dfrac{c^2}{4\pi\sigma}$

他にも中性粒子とイオンの速度差を考えると両極性拡散が現れたりする。

MHD方程式

理想MHDの寄与

オーム散逸の寄与

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \ , \tag{30}$$

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho \left(\boldsymbol{v} \cdot \nabla \right) \boldsymbol{v} = -\nabla P + \frac{1}{4\pi} \left(\nabla \times \boldsymbol{B} \right) \times \boldsymbol{B} + \rho \boldsymbol{g}, \tag{31}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} - \frac{4\pi\eta}{c} \boldsymbol{J} \right) \ , \tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot \left[\left(\rho E + P + \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{8\pi} \right) \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{B} \left(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B} \right)}{4\pi} + \frac{\eta}{c} \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \right] = \rho \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{v} \tag{33}$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \ , \tag{34}$$

$$\boldsymbol{v} = \left(v_x, v_y, v_z \right)^T, \qquad E = \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2} + \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{P}{\rho} + \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{8\pi\rho},$$

$$\boldsymbol{B} = \left(B_x, B_y, B_z \right)^T, \qquad \boldsymbol{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{g} = \left(g_x, g_y, g_z \right)^T = -\nabla \Phi,$$

MHD方程式（保存形）理想MHDの場合

黄色：　MHDの寄与

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \,, \tag{40}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot \left[\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T + \left(P + \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{8\pi} \right) I - \frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T}{4\pi} \right] = \rho \boldsymbol{g} \,, \tag{41}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}^T - \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}^T) = 0 \,, \tag{42}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot \left[\left(\rho E + P + \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{8\pi} \right) \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B})}{4\pi} \right] = \rho \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{v} \tag{43}$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \,, \tag{44}$$

MHD方程式（保存形・成分表示）

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_z}{\partial z} = \boldsymbol{S}, \tag{45}$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \tag{46}$$

$$\boldsymbol{U} = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, B_x, B_y, B_z, \rho E)^T \,, \tag{47}$$

$$\boldsymbol{F}_x = \left(\begin{array}{c} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P + |\boldsymbol{B}|^2/8\pi - B_x^2/4\pi \\ \rho v_x v_y - B_x B_y/4\pi \\ \rho v_x v_z - B_x B_z/4\pi \\ 0 \\ v_x B_y - v_y B_x \\ v_x B_z - v_z B_x \\ (\rho E + P + |\boldsymbol{B}|^2/8\pi) v_x - B_x (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{v})/4\pi \end{array} \right), \tag{48}$$

MHD方程式の波：アルフヴェン波など

Alfvén speed

$$c_A = \left(\frac{B^2}{4\pi\rho}\right)^{1/2} \tag{3}$$

Alfvén wave

$$v_A = c_A k_{\|}/k \tag{4}$$

Fast wave

$$v_{\mathrm{fast}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[c_s^2 + c_A^2 + \sqrt{\left(c_s^2 + c_A^2\right)^2 - 4c_s^2 c_A^2 k_{\|}^2/k^2}\right]^{1/2} \tag{5}$$

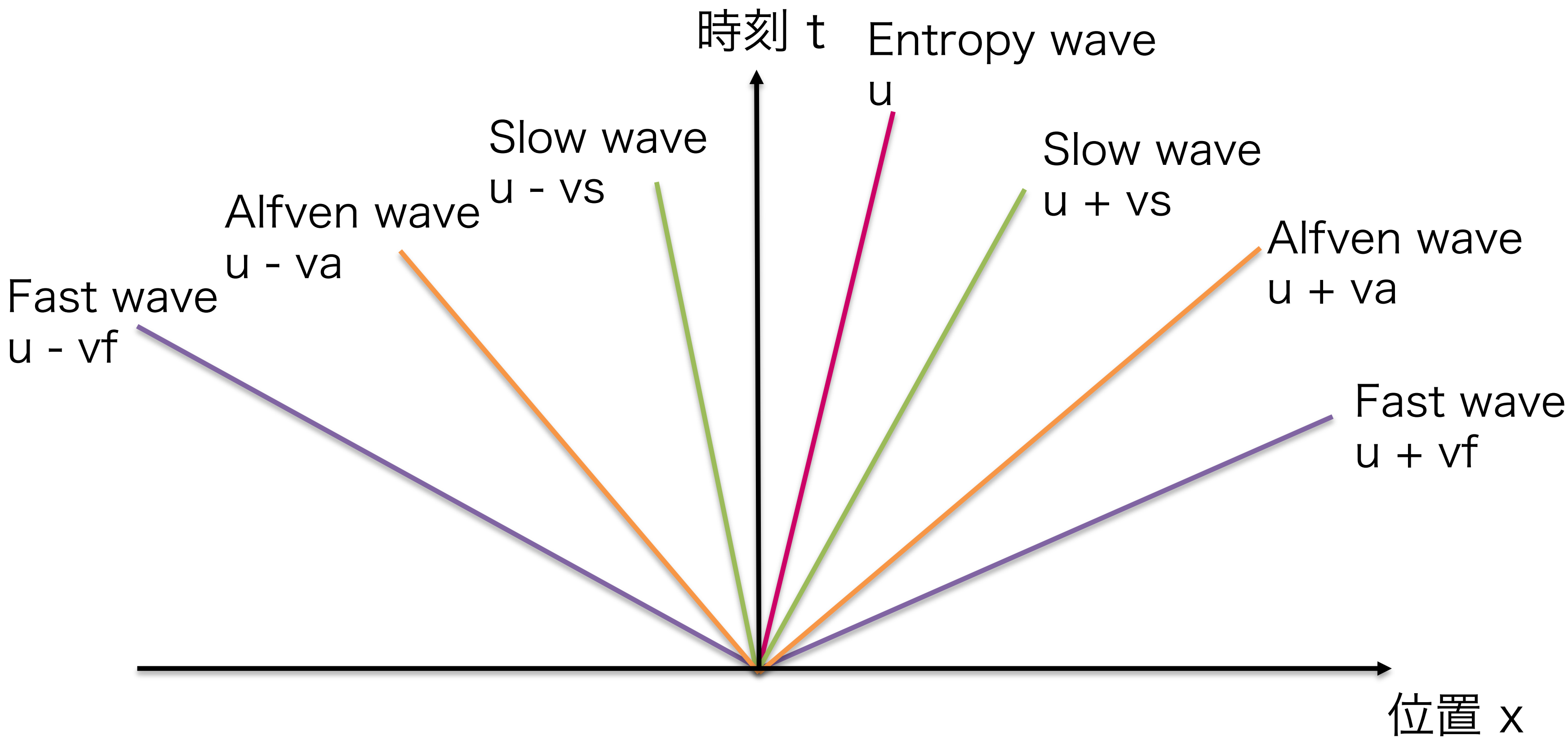
Slow wave

$$v_{\mathrm{slow}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[c_s^2 + c_A^2 - \sqrt{\left(c_s^2 + c_A^2\right)^2 - 4c_s^2 c_A^2 k_{\|}^2/k^2}\right]^{1/2} \tag{6}$$

where $k_{\|} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B}/B$

MHDの波は７個

MHD方程式は８成分－１個の束縛条件（div B = 0）＝7個の自由度



フリードリックスダイアグラム、 MHDの波紋

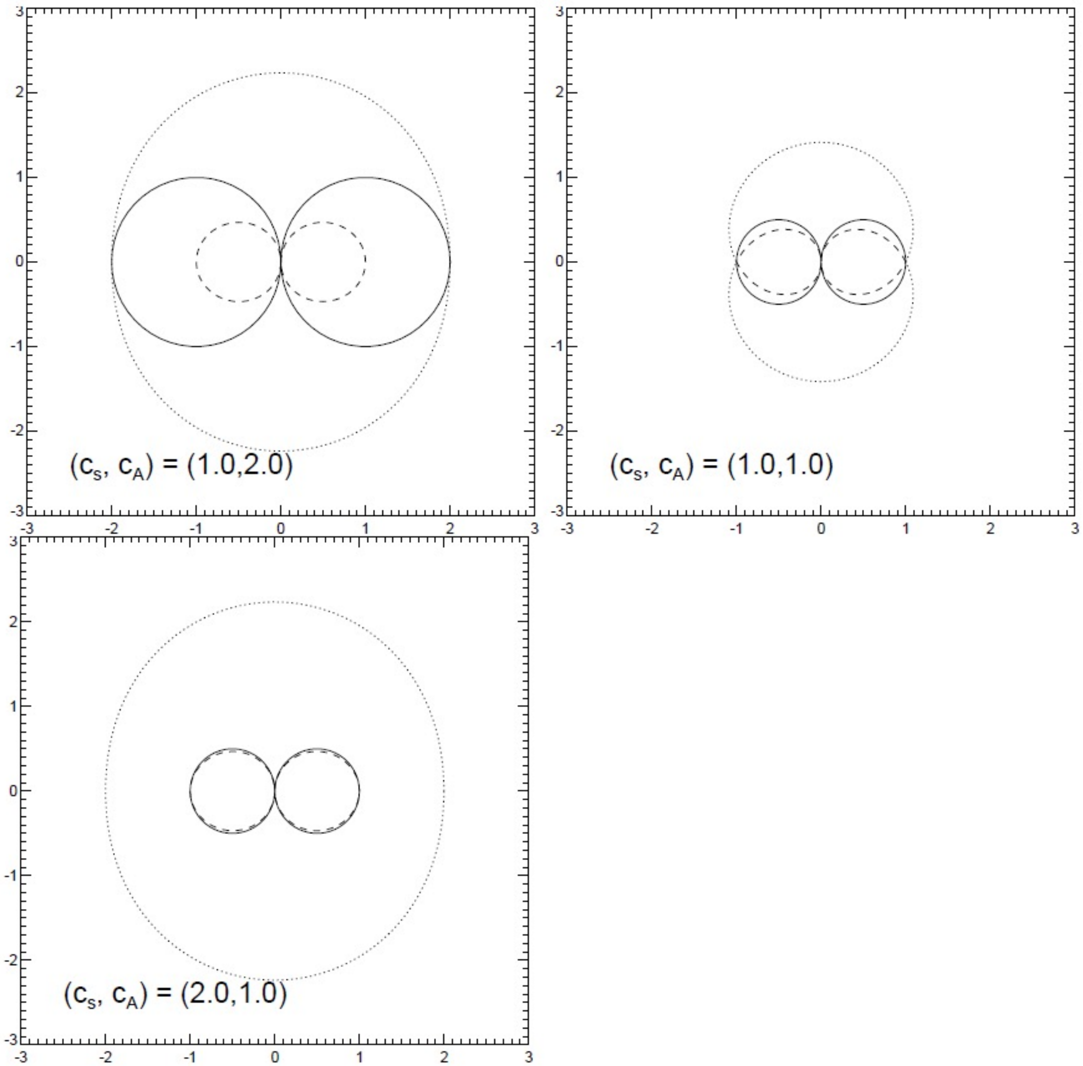
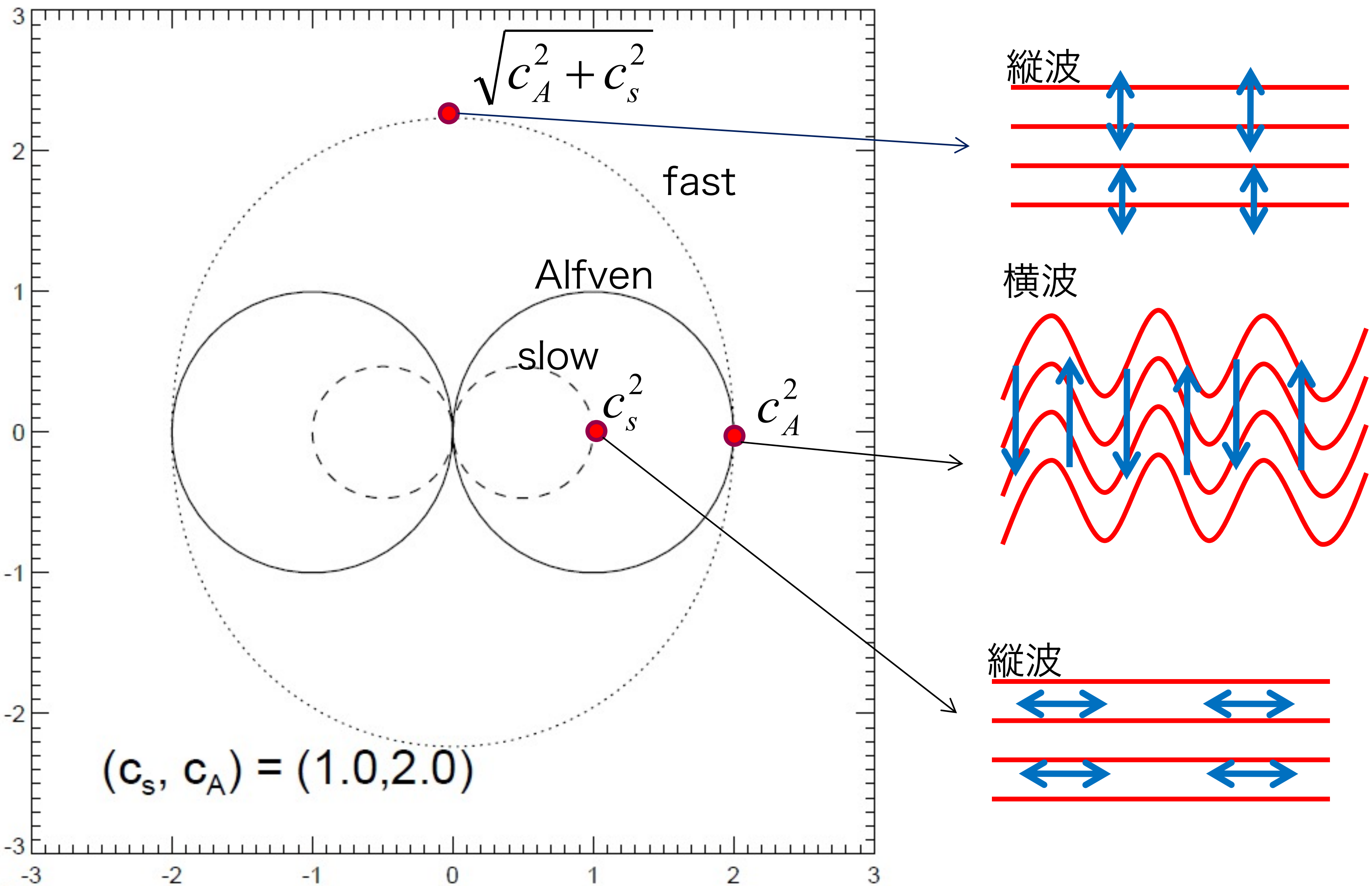
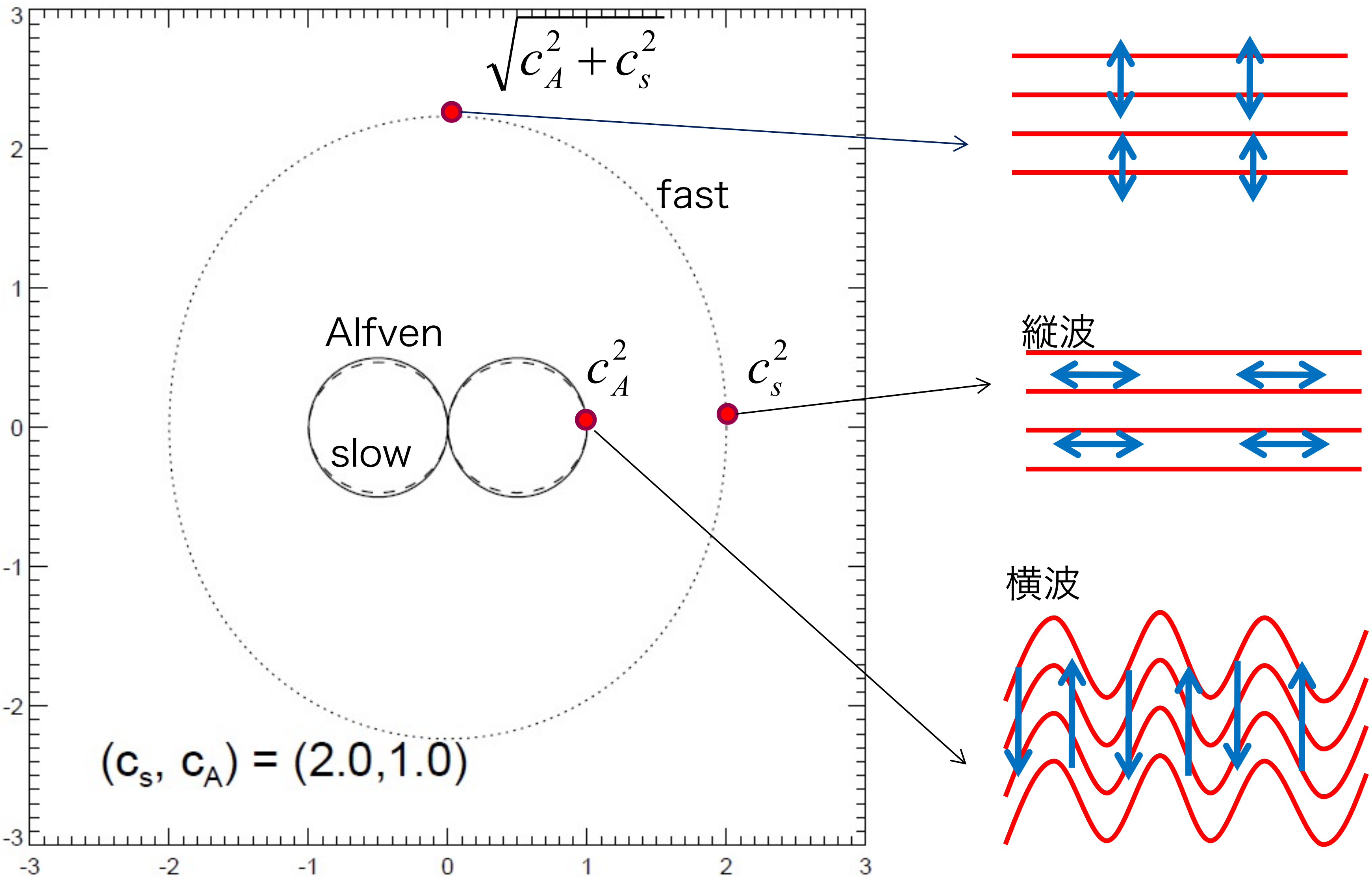


図 11: フリードリックスダイアグラム。点線は fast wave, 実線は Alfvén wave, 破線は slow wave の位相速度を示す。磁場は x 方向 (水平方向) に分布している。

CA > CS



CA < CS



$\sqrt{c_A^2 + c_s^2}$
fast
Alfven
slow
c_A^2
c_s^2
縦波
横波
(c$_s$, c$_A$) = (2.0,1.0)
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3

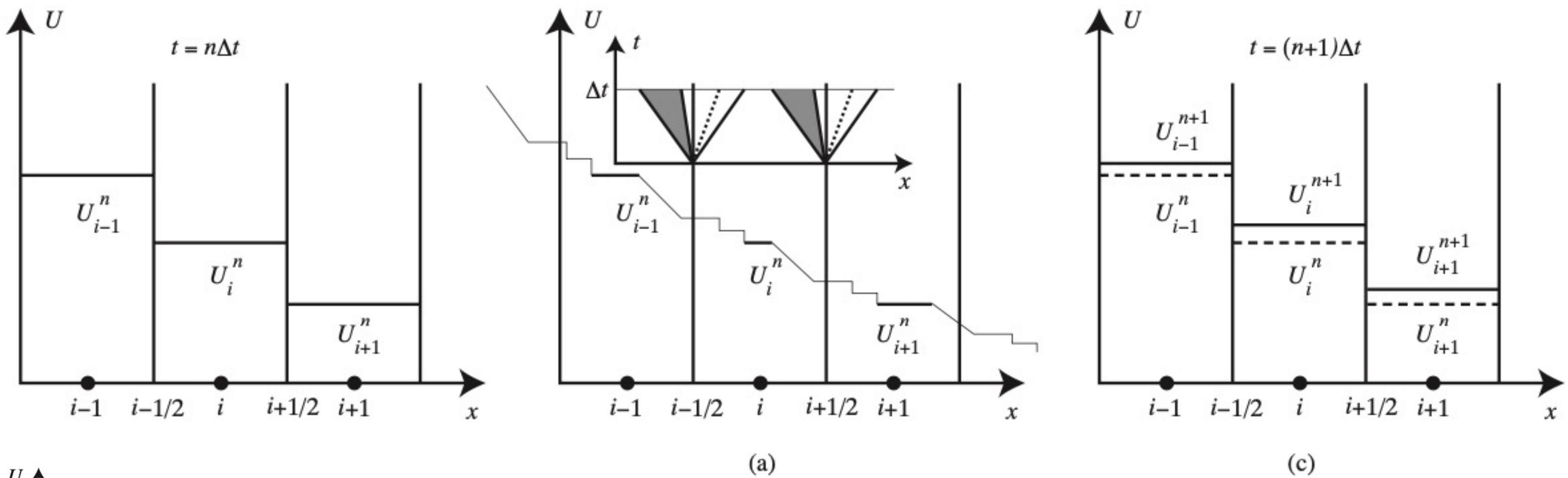
MHDの
数値解法

HLLD法

- HLLD法：MHDの近似リーマン解の業界標準
- リーマン問題はOK？
  - NO ➡ 教科書2.1.2節
- 近似リーマン解はOK？
  - NO ➡ 教科書2.2.1節
- HLL法はOK？
  - NO ➡ 教科書3.2節
- HLLD法　➡教科書 3.3節以降

ゴドノフ法とリーマン問題

ゴドノフ法：セル境界でリーマン問題を解く



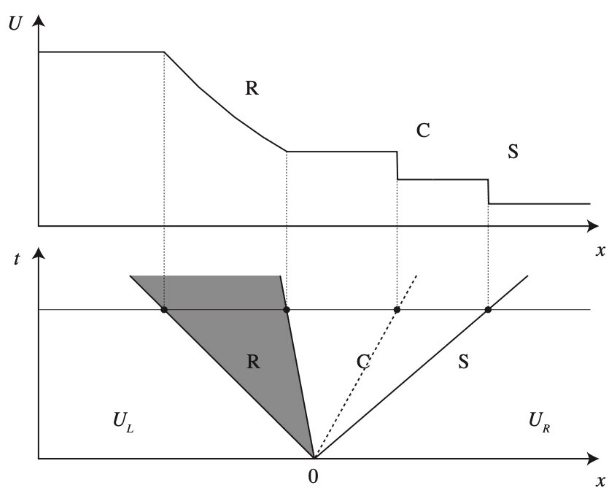


図 **2.3** リーマン問題の解（上図）とリーマンファン（下図）。R は膨張波、C は接触不連続、S は衝撃波を示す。

リーマン問題
- 衝撃波管問題 (shock tube problem)
- 左右異なる状態の初期値問題

リーマン問題の厳密解を解くのは嫌
➡ 近似リーマン解を使う
➡ 良い近似解は良いスキーム

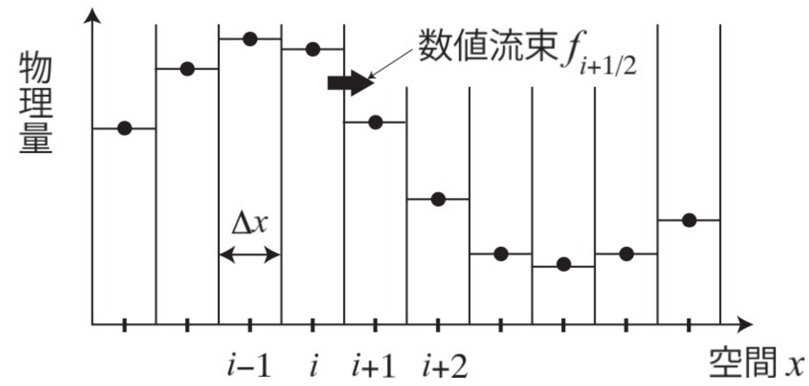
有限体積法と数値流束

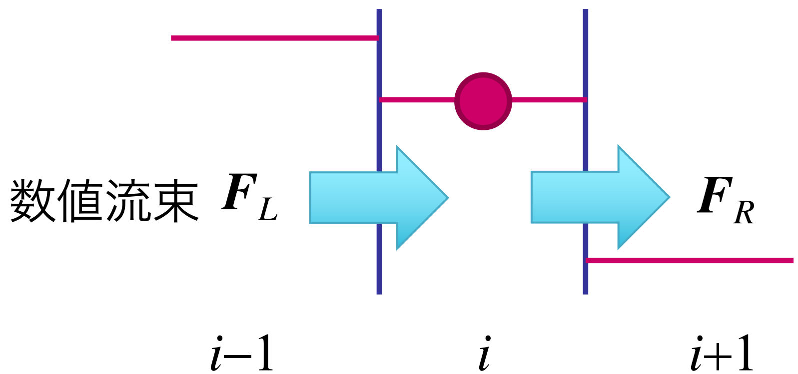
オイラー方程式 $$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} = 0$$

離散化 $$\frac{\boldsymbol{U}^{\text{new}} - \boldsymbol{U}}{\Delta t} + \frac{\boldsymbol{F}_R - \boldsymbol{F}_L}{\Delta x} = 0$$

解法 $$\boldsymbol{U}^{\text{new}} = \boldsymbol{U} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\boldsymbol{F}_R - \boldsymbol{F}_L)$$

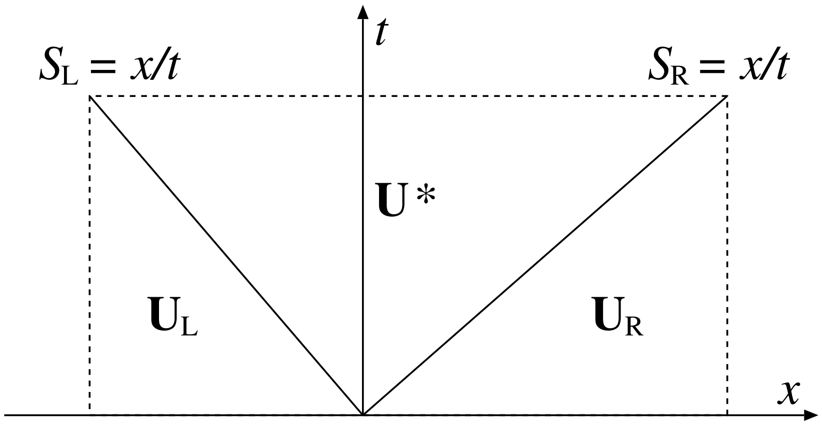
有限体積法の離散化





HLLの基本（HLLD法の準備体操）

Harten, Lax, van Leer 1983



$$\mathbf{U}^{*} = \frac{S_{\mathrm{R}}\mathbf{U}_{\mathrm{R}} - S_{\mathrm{L}}\mathbf{U}_{\mathrm{L}} - \mathbf{F}_{\mathrm{R}} + \mathbf{F}_{\mathrm{L}}}{S_{\mathrm{R}} - S_{\mathrm{L}}}.$$

中間状態

$$\mathbf{F}^{*} = \frac{S_{\mathrm{R}}\mathbf{F}_{\mathrm{L}} - S_{\mathrm{L}}\mathbf{F}_{\mathrm{R}} + S_{\mathrm{R}}S_{\mathrm{L}}(\mathbf{U}_{\mathrm{R}} - \mathbf{U}_{\mathrm{L}})}{S_{\mathrm{R}} - S_{\mathrm{L}}}.$$

中間状態にもとづく数値流束

接触不連続面を分解しないのでドロドロの数値粘性

数値流束の切り替え

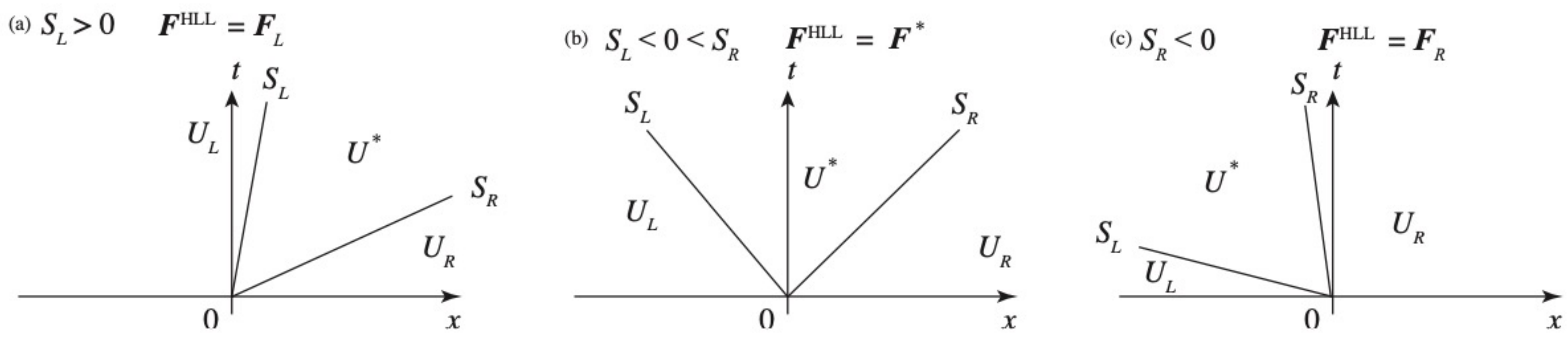


図 **3.3** HLL 法のリーマンファンと数値流束の切り替え。

$$\mathbf{F}_{\mathrm{HLL}} = \begin{cases} \mathbf{F}_{\mathrm{L}} & \text{if } S_{\mathrm{L}} > 0, \\ \mathbf{F}^* & \text{if } S_{\mathrm{L}} \leqslant 0 \leqslant S_{\mathrm{R}}, \\ \mathbf{F}_{\mathrm{R}} & \text{if } S_{\mathrm{R}} < 0. \end{cases}$$

リーマンファンが広がる速度
波の最大速度が安全
　いくつかの流儀がある

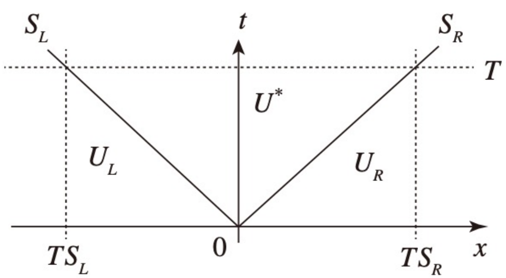
$$S_L = \min(u_L - c_{s,L}, u_R - c_{s,R})$$

$$S_R = \max(u_L + c_{s,L}, u_R + c_{s,R})$$

$$S_L = \bar{\bar{u}} - \bar{\bar{c}}_s$$

$$S_R = \bar{\bar{u}} + \bar{\bar{c}}_s \qquad \bar{\bar{u}} = \frac{u_L\sqrt{\rho_L} + u_R\sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \qquad \bar{\bar{c}}_s^2 = (\gamma - 1)\left(\bar{\bar{H}} - \frac{\bar{\bar{q}}^2}{2}\right)$$

HLL法の導出



$$\boldsymbol{U}(x,T) = \begin{cases} \boldsymbol{U}_L & \text{for } x < TS_L, \\ \boldsymbol{U}^* & \text{for } TS_L < x < TS_R, \\ \boldsymbol{U}_R & \text{for } x > TS_R, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{U}(x,0) = \begin{cases} \boldsymbol{U}_L & \text{for } x < 0, \\ \boldsymbol{U}_R & \text{for } x > 0, \end{cases}$$

図 3.4 HLL 法の導出。区間 $[TS_L, TS_R] \times [0,T]$ を考える。

$\dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} = 0$ を $[TS_L, TS_R] \times [0,T]$ で積分する

$$\int_0^T dt \int_{TS_L}^{TS_R} dx \frac{\partial \boldsymbol{U}(x,t)}{\partial t} + \int_0^T dt \int_{TS_L}^{TS_R} dx \frac{\partial \boldsymbol{F}(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{U}^* = \frac{(S_R \boldsymbol{U}_R - S_L \boldsymbol{U}_L + \boldsymbol{F}_L - \boldsymbol{F}_R)}{S_R - S_L}$$

板書

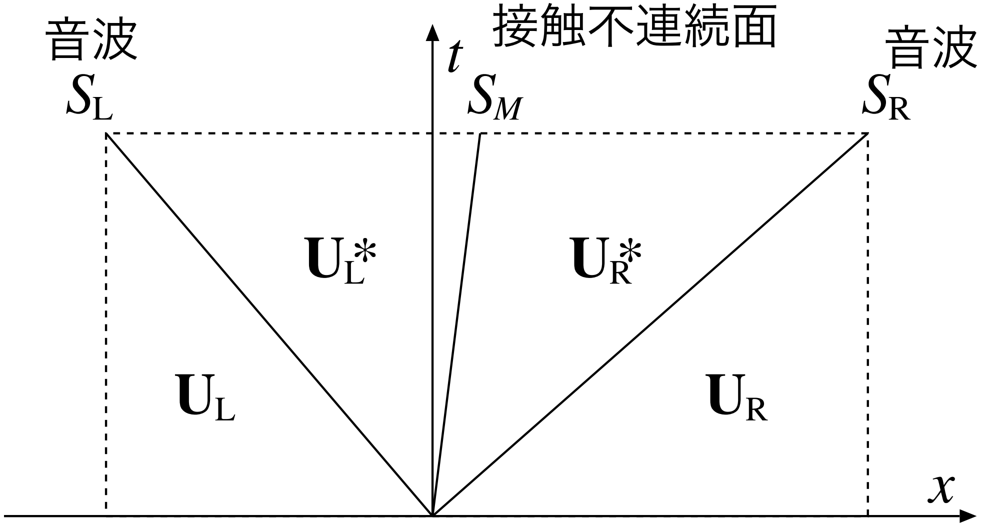
$[TS_L, 0] \times [0,T]$ で積分する

$$\int_0^T dt \int_{TS_L}^{0} dx \frac{\partial \boldsymbol{U}(x,t)}{\partial t} + \int_0^T dt \int_{TS_L}^{0} dx \frac{\partial \boldsymbol{F}(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F}^* - \boldsymbol{F}_L = S_L(\boldsymbol{U}^* - \boldsymbol{U}_L)$$

ジャンプ条件と呼ぶ

$$\boldsymbol{F}^* = \frac{S_R \boldsymbol{F}_L - S_L \boldsymbol{F}_R + S_L S_R (\boldsymbol{U}_R - \boldsymbol{U}_L)}{S_R - S_L}$$

HLLC 接触不連続面を扱えるように（黒板で）



Toro+ 94

$$\mathbf{F}_{\mathrm{HLLC}} = \begin{cases} \mathbf{F}_\mathrm{L} & \text{if } S_\mathrm{L} > 0, \\ \mathbf{F}_\mathrm{L}^* & \text{if } S_\mathrm{L} \leqslant 0 \leqslant S_M, \\ \mathbf{F}_\mathrm{R}^* & \text{if } S_M \leqslant 0 \leqslant S_\mathrm{R}, \\ \mathbf{F}_\mathrm{R} & \text{if } S_\mathrm{R} < 0. \end{cases}$$

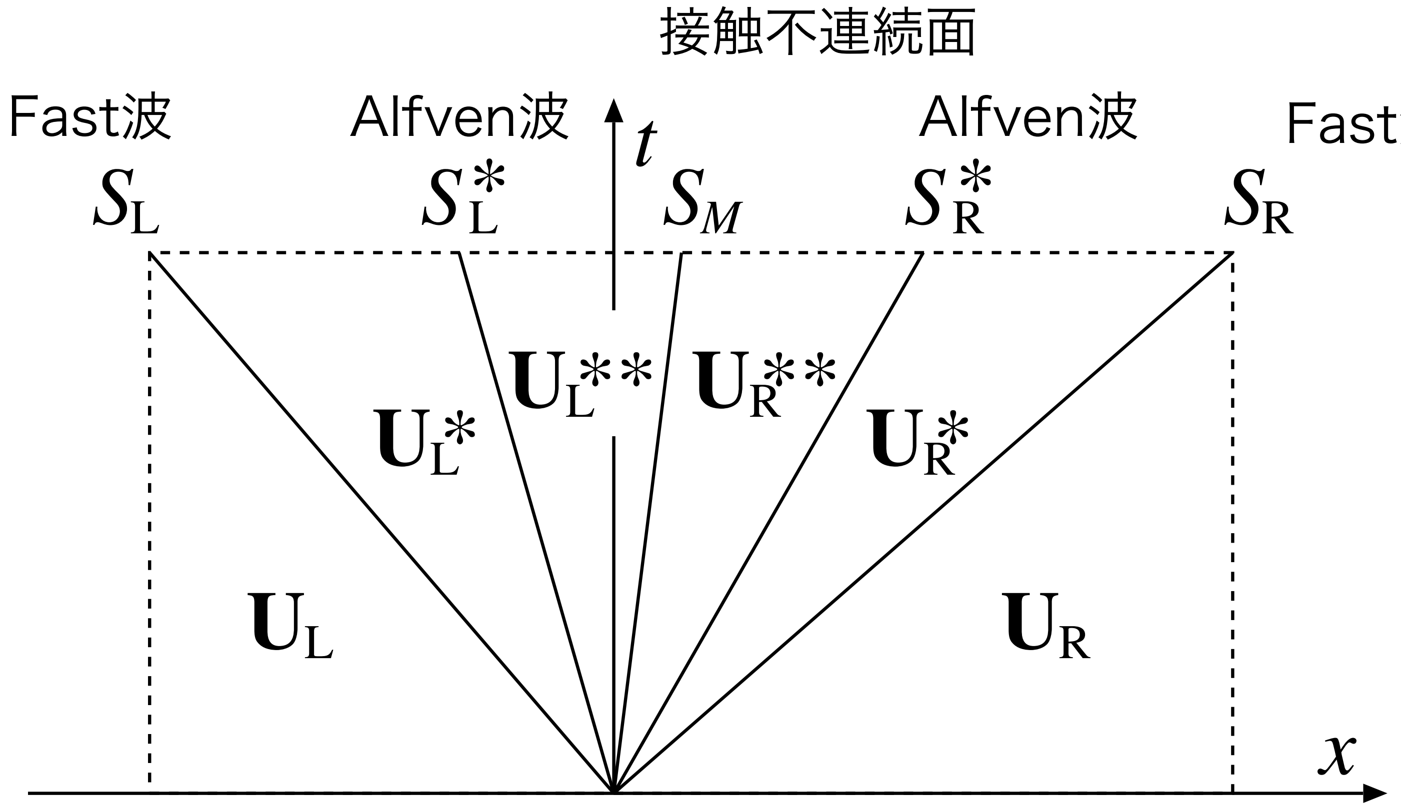
HLLから

$$S_M = \frac{(\rho u)^*}{\rho^*} = \frac{(S_\mathrm{R} - u_\mathrm{R})\rho_\mathrm{R} u_\mathrm{R} - (S_\mathrm{L} - u_\mathrm{L})\rho_\mathrm{L} u_\mathrm{L} - p_\mathrm{R} + p_\mathrm{L}}{(S_\mathrm{R} - u_\mathrm{R})\rho_\mathrm{R} - (S_\mathrm{L} - u_\mathrm{L})\rho_\mathrm{L}},$$

$$S_\alpha \mathbf{U}_\alpha^* - \mathbf{F}_\alpha^* = S_\alpha \mathbf{U}_\alpha - \mathbf{F}_\alpha,$$ ジャンプ条件

S_L と S_R の ジャンプ条件により U* と F* を求める。

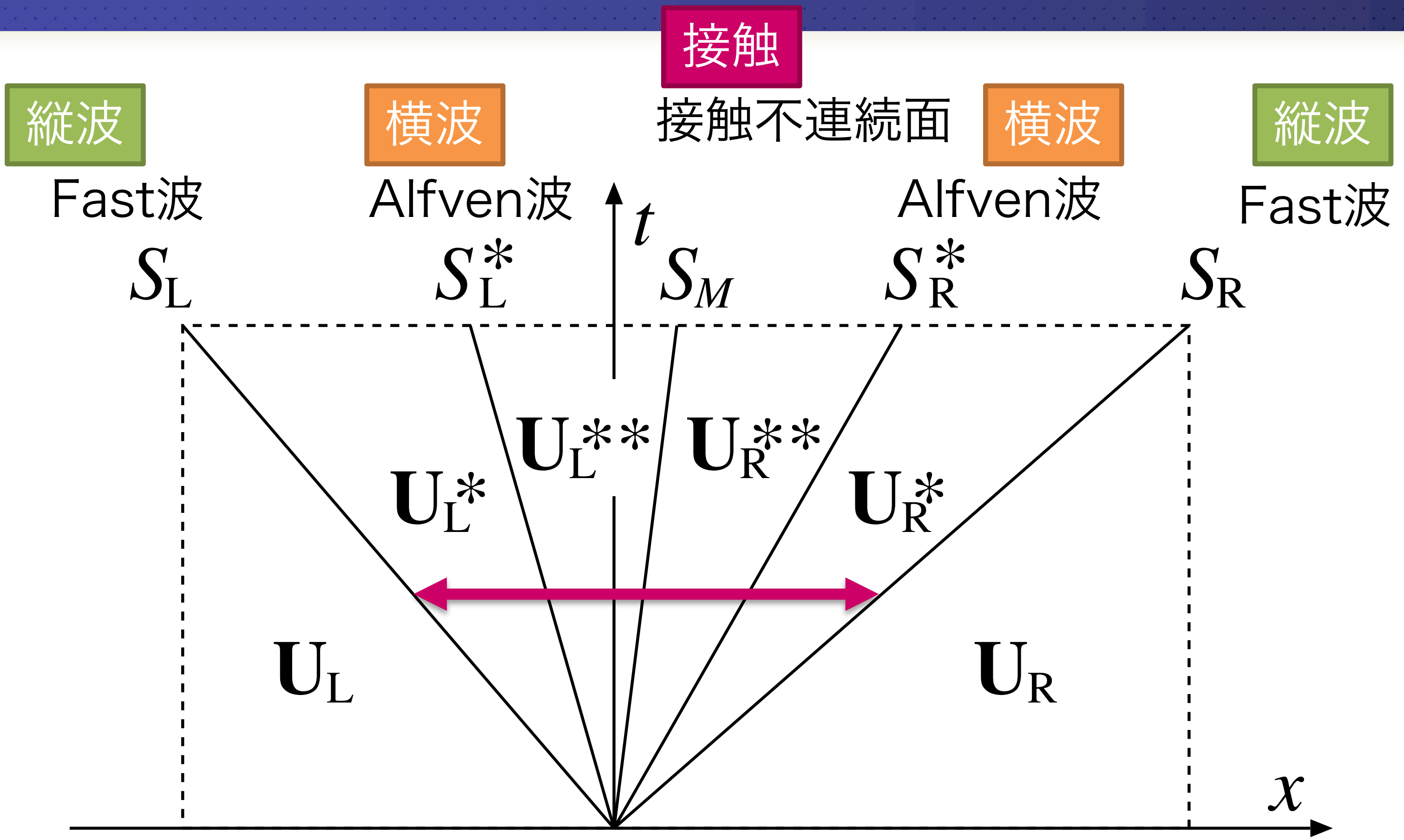
HLLD： HLLCにAlfven波を追加



５個の波で近似する。
（Slow波を一旦忘れる）

$$
\mathbf{F}_\mathrm{HLLD} = \begin{cases} \mathbf{F}_\mathrm{L} & \text{if } S_\mathrm{L} > 0, \\ \mathbf{F}_\mathrm{L}^* & \text{if } S_\mathrm{L} \leqslant 0 \leqslant S_\mathrm{L}^*, \\ \mathbf{F}_\mathrm{L}^{**} & \text{if } S_\mathrm{L}^* \leqslant 0 \leqslant S_M, \\ \mathbf{F}_\mathrm{R}^{**} & \text{if } S_M \leqslant 0 \leqslant S_\mathrm{R}^*, \\ \mathbf{F}_\mathrm{R}^* & \text{if } S_\mathrm{R}^* \leqslant 0 \leqslant S_\mathrm{R}, \\ \mathbf{F}_\mathrm{R} & \text{if } S_\mathrm{R} < 0. \end{cases}
$$

HLLD　磁場を扱えるように



仮定

リーマンファンの中で S_M 移流速度、p_T^* 圧力　一定

$$S_M = \frac{(S_{\mathrm{R}} - u_{\mathrm{R}})\rho_{\mathrm{R}} u_{\mathrm{R}} - (S_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{L}})\rho_{\mathrm{L}} u_{\mathrm{L}} - p_{T_{\mathrm{R}}} + p_{T_{\mathrm{L}}}}{(S_{\mathrm{R}} - u_{\mathrm{R}})\rho_{\mathrm{R}} - (S_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{L}})\rho_{\mathrm{L}}},$$

HLLCと同じ

jump condition を適用して状態を求める

$$S_L(\boldsymbol{U}_L^* - \boldsymbol{U}_L) = \boldsymbol{F}_L^* - \boldsymbol{F}_L$$

$$\boldsymbol{U}_L \Longrightarrow \boldsymbol{U}_L^*$$

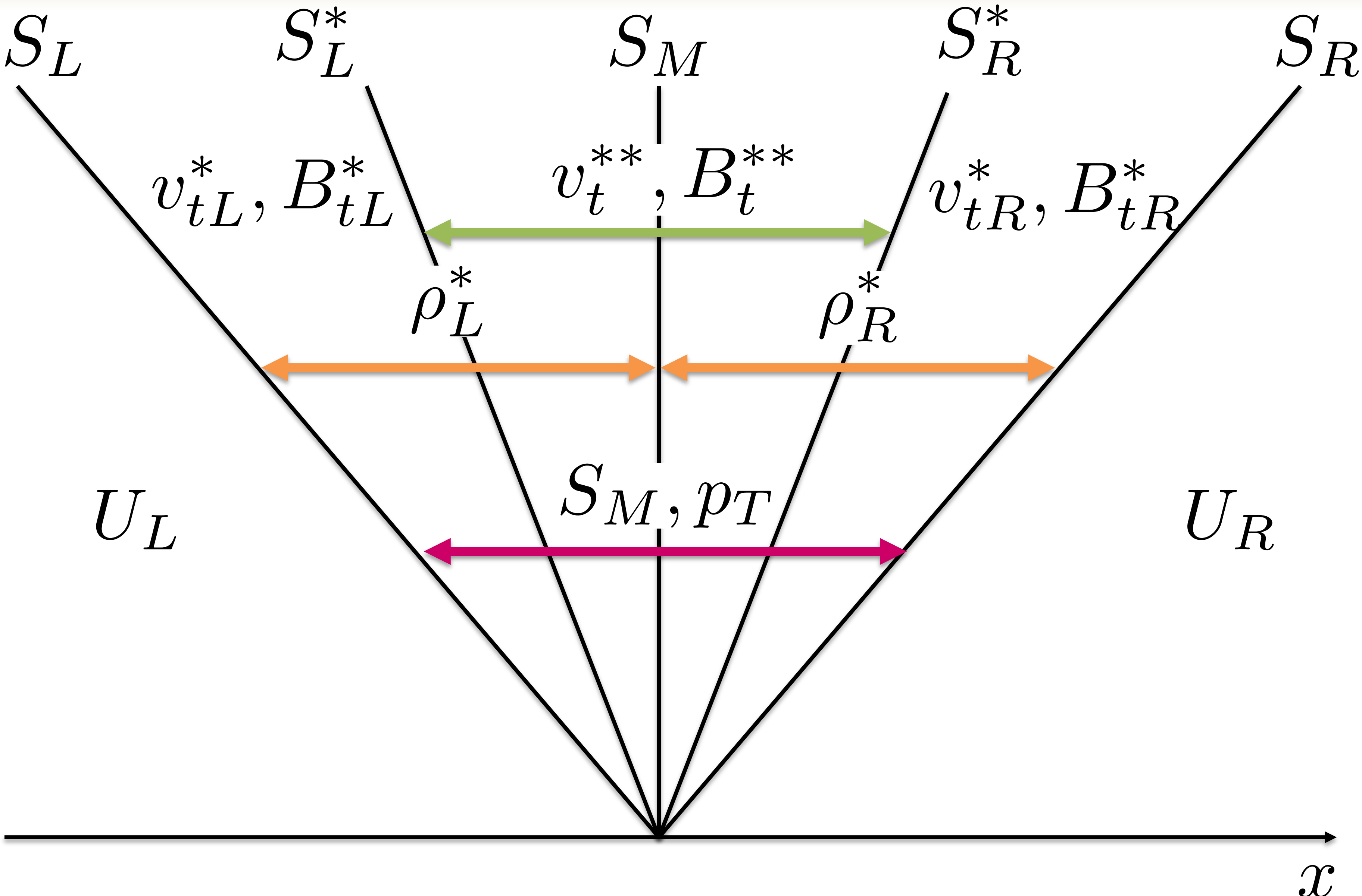
$$S_L^*(\boldsymbol{U}_L^{**} - \boldsymbol{U}_L^*) = \boldsymbol{F}_L^{**} - \boldsymbol{F}_L^*$$

$$S_M(\boldsymbol{U}_L^{**} - \boldsymbol{U}_R^{**}) = \boldsymbol{F}_L^{**} - \boldsymbol{F}_R^{**}$$

$$\boldsymbol{U}_L^* \Longrightarrow \boldsymbol{U}_L^{**}$$

右側についても同様に

リーマンファンはこんな感じになる。



具体的な成分

$$\boxed{\begin{gathered} u_{\mathrm{L}}^{*} = u_{\mathrm{L}}^{**} = u_{\mathrm{R}}^{**} = u_{\mathrm{R}}^{*} = S_M \\ p_{\mathrm{T_L}}^{*} = p_{\mathrm{T_L}}^{**} = p_{\mathrm{T_R}}^{**} = p_{\mathrm{T_R}}^{*} = p_{\mathrm{T}}^{*}. \end{gathered}}$$

仮定

$$\boxed{S_{\mathrm{L}}^{*} = S_M - \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_{\mathrm{L}}^{*}}}, \quad S_{\mathrm{R}}^{*} = S_M + \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_{\mathrm{R}}^{*}}}.}$$

仮定

$$S_M = \frac{(S_{\mathrm{R}} - u_{\mathrm{R}})\rho_{\mathrm{R}} u_{\mathrm{R}} - (S_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{L}})\rho_{\mathrm{L}} u_{\mathrm{L}} - p_{\mathrm{T_R}} + p_{\mathrm{T_L}}}{(S_{\mathrm{R}} - u_{\mathrm{R}})\rho_{\mathrm{R}} - (S_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{L}})\rho_{\mathrm{L}}},$$

$$p_{\mathrm{T}}^{*} = \frac{(S_{\mathrm{R}} - u_{\mathrm{R}})\rho_{\mathrm{R}} p_{\mathrm{T_L}} - (S_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{L}})\rho_{\mathrm{L}} p_{\mathrm{T_R}} + \rho_{\mathrm{L}}\rho_{\mathrm{R}}(S_{\mathrm{R}} - u_{\mathrm{R}})(S_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{L}})(u_{\mathrm{R}} - u_{\mathrm{L}})}{(S_{\mathrm{R}} - u_{\mathrm{R}})\rho_{\mathrm{R}} - (S_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{L}})\rho_{\mathrm{L}}}.$$

$$p_{\mathrm{T}_\alpha}^{**} = p_{\mathrm{T}_\alpha}^{*}.$$

$$\rho_\alpha^{*} = \rho_\alpha \frac{S_\alpha - u_\alpha}{S_\alpha - S_M},$$

$$\rho_\alpha^{**} = \rho_\alpha^{*},$$

$$v_\alpha^{*} = v_\alpha - B_x B_{y_\alpha} \frac{S_M - u_\alpha}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)(S_\alpha - S_M) - B_x^2},$$

$$v^{**} = \frac{\sqrt{\rho_{\mathrm{L}}^{*}} v_{\mathrm{L}}^{*} + \sqrt{\rho_{\mathrm{R}}^{*}} v_{\mathrm{R}}^{*} + (B_{y_{\mathrm{R}}}^{*} - B_{y_{\mathrm{L}}}^{*})\mathrm{sign}(B_x)}{\sqrt{\rho_{\mathrm{L}}^{*}} + \sqrt{\rho_{\mathrm{R}}^{*}}},$$

$$w_\alpha^{*} = w_\alpha - B_x B_{z_\alpha} \frac{S_M - u_\alpha}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)(S_\alpha - S_M) - B_x^2},$$

$$w^{**} = \frac{\sqrt{\rho_{\mathrm{L}}^{*}} w_{\mathrm{L}}^{*} + \sqrt{\rho_{\mathrm{R}}^{*}} w_{\mathrm{R}}^{*} + (B_{z_{\mathrm{R}}}^{*} - B_{z_{\mathrm{L}}}^{*})\mathrm{sign}(B_x)}{\sqrt{\rho_{\mathrm{L}}^{*}} + \sqrt{\rho_{\mathrm{R}}^{*}}},$$

$$B_{y_\alpha}^{*} = B_{y_\alpha} \frac{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)^2 - B_x^2}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)(S_\alpha - S_M) - B_x^2}.$$

$$B_y^{**} = \frac{\sqrt{\rho_{\mathrm{L}}^{*}} B_{y_{\mathrm{R}}}^{*} + \sqrt{\rho_{\mathrm{R}}^{*}} B_{y_{\mathrm{L}}}^{*} + \sqrt{\rho_{\mathrm{L}}^{*}\rho_{\mathrm{R}}^{*}}(v_{\mathrm{R}}^{*} - v_{\mathrm{L}}^{*})\mathrm{sign}(B_x)}{\sqrt{\rho_{\mathrm{L}}^{*}} + \sqrt{\rho_{\mathrm{R}}^{*}}},$$

$$B_{z_\alpha}^{*} = B_{z_\alpha} \frac{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)^2 - B_x^2}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)(S_\alpha - S_M) - B_x^2}.$$

$$B_z^{**} = \frac{\sqrt{\rho_{\mathrm{L}}^{*}} B_{z_{\mathrm{R}}}^{*} + \sqrt{\rho_{\mathrm{R}}^{*}} B_{z_{\mathrm{L}}}^{*} + \sqrt{\rho_{\mathrm{L}}^{*}\rho_{\mathrm{R}}^{*}}(w_{\mathrm{R}}^{*} - w_{\mathrm{L}}^{*})\mathrm{sign}(B_x)}{\sqrt{\rho_{\mathrm{L}}^{*}} + \sqrt{\rho_{\mathrm{R}}^{*}}},$$

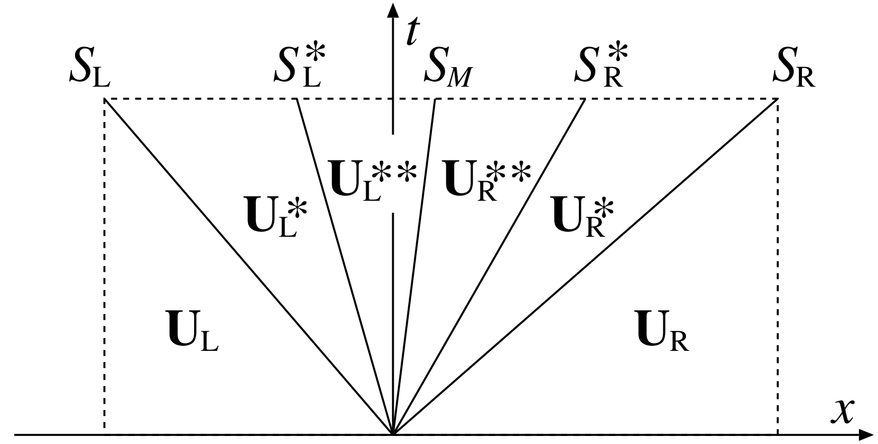
$$e_\alpha^{*} = \frac{(S_\alpha - u_\alpha)e_\alpha - p_{\mathrm{T}_\alpha} u_\alpha + p_{\mathrm{T}}^{*} S_M + B_x(\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha - \mathbf{v}_\alpha^{*} \cdot \mathbf{B}_\alpha^{*})}{S_\alpha - S_M}.$$

$$e_\alpha^{**} = e_\alpha^{*} \mp \sqrt{\rho_\alpha^{*}}(\mathbf{v}_\alpha^{*} \cdot \mathbf{B}_\alpha^{*} - \mathbf{v}^{**} \cdot \mathbf{B}^{**})\mathrm{sign}(B_x),$$

α = L or R

HLLDまとめ

$$\mathbf{F}_{\mathrm{HLLD}} = \begin{cases} \mathbf{F}_{\mathrm{L}} & \text{if } S_{\mathrm{L}} > 0, \\ \mathbf{F}^*_{\mathrm{L}} & \text{if } S_{\mathrm{L}} \leqslant 0 \leqslant S^*_{\mathrm{L}}, \\ \mathbf{F}^{**}_{\mathrm{L}} & \text{if } S^*_{\mathrm{L}} \leqslant 0 \leqslant S_M, \\ \mathbf{F}^{**}_{\mathrm{R}} & \text{if } S_M \leqslant 0 \leqslant S^*_{\mathrm{R}}, \\ \mathbf{F}^*_{\mathrm{R}} & \text{if } S^*_{\mathrm{R}} \leqslant 0 \leqslant S_{\mathrm{R}}, \\ \mathbf{F}_{\mathrm{R}} & \text{if } S_{\mathrm{R}} < 0. \end{cases}$$



Jump condition から　（またはリーマンファンを積分して）

$$\mathbf{F}^*_{\mathrm{L}} = \mathbf{F}_{\mathrm{L}} + S_{\mathrm{L}}\mathbf{U}^*_{\mathrm{L}} - S_{\mathrm{L}}\mathbf{U}_{\mathrm{L}}$$

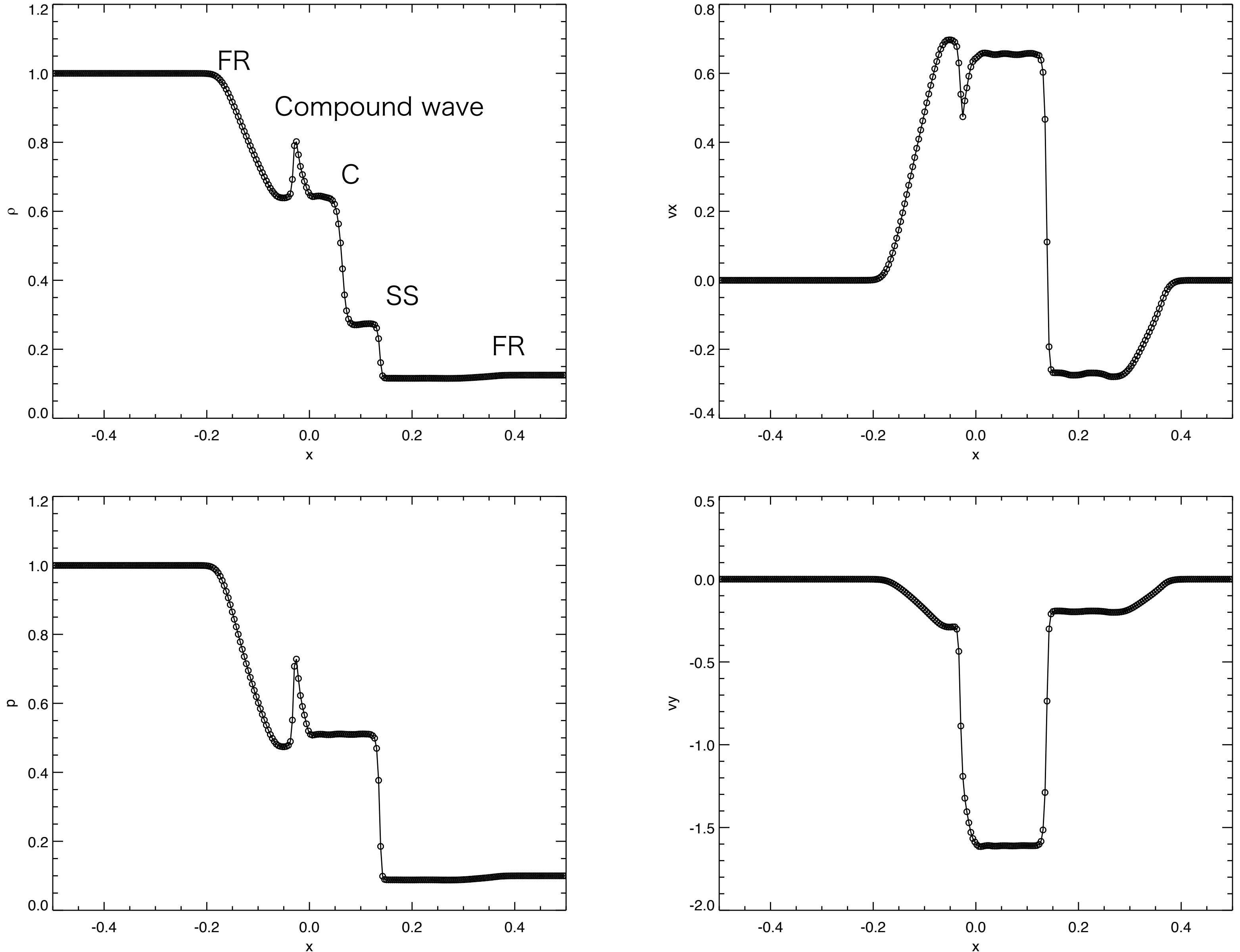
$$\mathbf{F}^{**}_{\mathrm{L}} = \mathbf{F}_{\mathrm{L}} + S^*_{\mathrm{L}}\mathbf{U}^{**}_{\mathrm{L}} - (S^*_{\mathrm{L}} - S_{\mathrm{L}})\mathbf{U}^*_{\mathrm{L}} - S_{\mathrm{L}}\mathbf{U}_{\mathrm{L}}$$

または

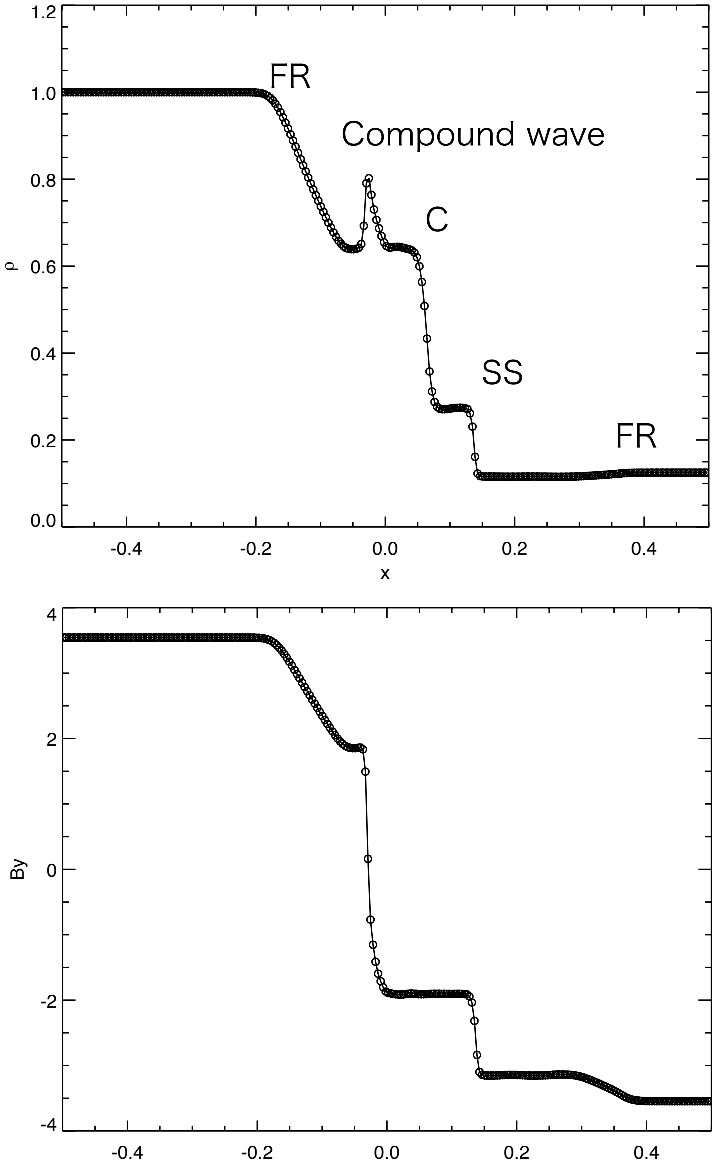
$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{\mathrm{HLLD}} &= \boldsymbol{F}(U^{\beta}_{\alpha}), \\ \alpha &= L \text{ or } R, \\ \beta &= . \text{ or } * \text{ or } ** \end{aligned}}$$

でもよい！

Brio & Wu (1988) shock tube problem



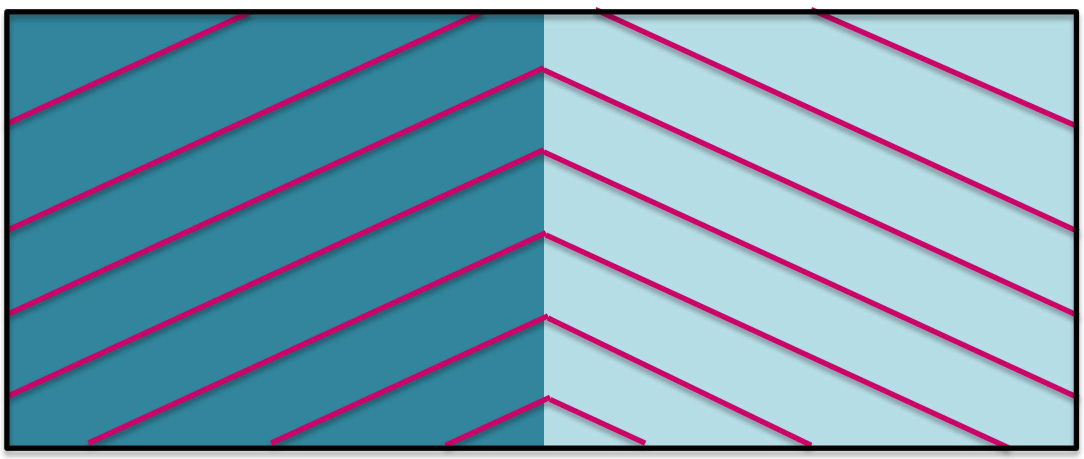
Brio & Wu (1988) shock tube problem



Brio & Wu (1988) shock tube problem

$$x \in [-0.5, 0.5],$$
$$t = 0.1,$$
$$B_x = 0.75\sqrt{4\pi},$$

$$\begin{pmatrix} \rho \\ p \\ u \\ v \\ w \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{4\pi} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \rho \\ p \\ u \\ v \\ w \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{4\pi} \\ 0 \end{pmatrix}$$



∇・B = 0 の問題

物理的な力

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{c}\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$$ ローレンツ力

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\cancel{\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}$$

マックスウェル方程式（アンペールの法則）

$$= \frac{1}{4\pi}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\nabla B^2 + \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

磁気圧勾配＋磁気張力

$$= \underbrace{-\nabla\cdot\left(\frac{B^2}{8\pi}\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T}{4\pi}\right)}_{\text{磁気圧勾配　磁気張力}} - \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})$$

シミュレーションで解く力

本来存在しない力

磁場X磁荷

∇・B の処方箋

- Projection method
  - Poisson 方程式を解き、div B に寄与する磁場成分（スカラー場）を差し引く。
  - Poisson 方程式を解くので、重い。

- Constrained Transport (CT) method
  - Staggered grid で、磁場をセル境界で定義する。
  - 丸め誤差の範囲で div B = 0 が保証される。

- 8-wave formulation
  - 8成分目として、div B の流れを解く。移流速度はガスの速度と同じ。
  - 簡単な実装だが、ソース項が必要になる。div B が溜まる。

- Hyperbolic divergence cleaning
  - div B を等方的に移流させる。同時に、流れを減衰させる。
  - 簡単な実装だが、ソース項が必要になる。

Projection method

$$q = \nabla \cdot B$$ 磁荷を求める

$$\nabla^2 \Psi = q$$ Poisson 方程式を解く

$$B^{new} = B - \nabla \Psi$$ 磁荷が発生する磁場成分を差し引く

これをMHDが解き終わった後に施す。

解の性質は良いが、Poisson ソルバが重いのが弱点。

Constraint Transport (CT) method

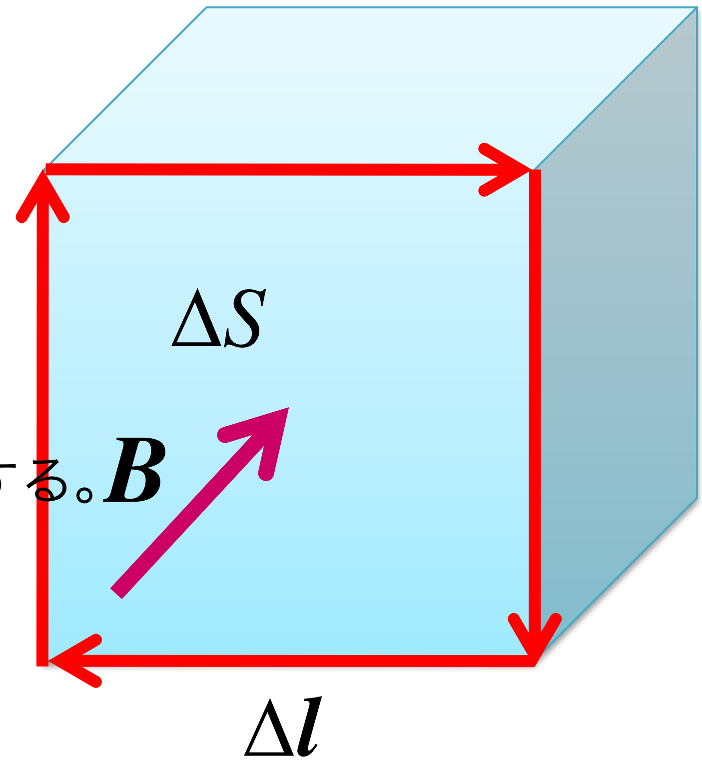
磁場をセルの面で定義する。

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (v \times B)$$

誘導方程式

ストークスの定理を利用して

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta S} \oint v \times B \cdot dl$$



この方程式にしたがって、磁場を時間積分する。
起電力v×B を数値流束から流用する。
丸め誤差の範囲で∇・Bが保存する。

数値流束：　　セルの面で定義
起電力 v×B：　セルの辺で定義
風上性を考慮した内挿が必要。最近良い方法が見つかったらしい。

8 waves formulation

$$
\begin{aligned}
\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, \\
\partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u}\mathbf{u}^T + \left(p + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 \right) \mathcal{I} - \mathbf{B}\mathbf{B}^T \right] &= \underline{-(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}}, \\
\partial_t \mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{B}^T - \mathbf{B}\mathbf{u}^T) &= \underline{-(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{u}}, \\
\partial_t e + \nabla \cdot \left[\left(e + p + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 \right) \mathbf{u} - \mathbf{B}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \right] &= \underline{-(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}}.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

磁荷∇・Bによる力を打ち消すように、
ソース項を付加する。

$$
\frac{\partial B_x}{\partial t} = -(\nabla \cdot B) u_x
$$

$$
= -u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} - \cdots
$$

第8の波が現れる。
位相速度は u_x
磁荷∇・Bをuで運ぶ波。

よどみ点や衝撃波で∇・Bが溜まってしまう。

Hyperbolic divergence cleaning

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{24a}$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u}\mathbf{u}^T + \left(p + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 \right) \mathcal{I} - \mathbf{B}\mathbf{B}^T \right] = \underline{-(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}}, \tag{24b}$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{B}^T - \mathbf{B}\mathbf{u}^T + \underline{\psi \mathcal{I}}) = 0, \tag{24c}$$

$$\partial_t e + \nabla \cdot \left[\left(e + p + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 \right) \mathbf{u} - \mathbf{B}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \right] = \underline{-\mathbf{B} \cdot (\nabla \psi)}, \tag{24d}$$

$$\underline{\partial_t \psi + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2}\psi}. \tag{24e}$$

c_h とc_pはフリーパラメータ

赤：mixed GLM formulation による項（著者のお勧め）
橙：EGLM formulation による項

固有値は9個

$$\lambda_1 = -c_h, \quad \lambda_2 = u_x - c_f, \quad \lambda_3 = u_x - c_a, \quad \lambda_4 = u_x - c_s, \quad \lambda_5 = u_x,$$
$$\lambda_6 = u_x + c_s, \quad \lambda_7 = u_x + c_a, \quad \lambda_8 = u_x + c_f, \quad \lambda_9 = c_h.$$

詳細は Dedner, Kemm, Kroner, Munz, Schnitzer, Wesenberg, 2002, JCP, 175, 645

２つの波（方程式）が追加; 7 + 2 waves

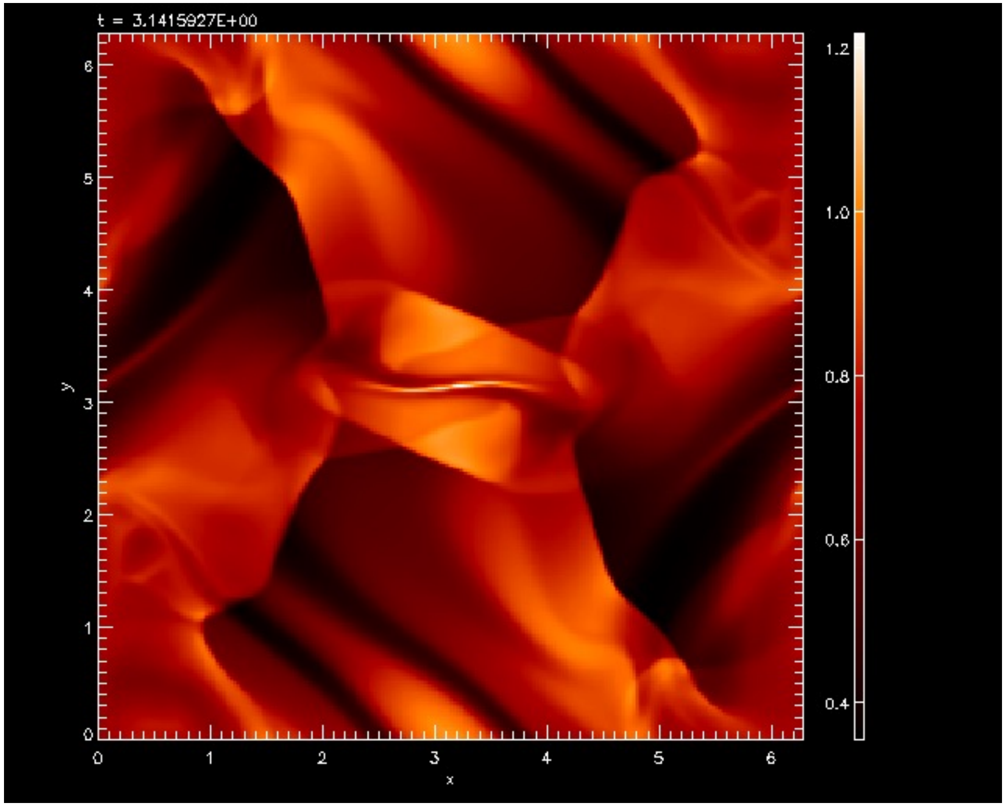
$$\partial_t B_x + \partial_x \psi = 0,$$

$$\partial_t \psi + c_h^2 \partial_x B_x = -\frac{c_h^2}{c_p^2}\psi.$$

B_xとψの波動方程式

ψの減衰

Orzag-Tang (1979) vortex problem



$$x, y \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi],$$
$$t = \pi,$$
$$\begin{pmatrix} \rho \\ p \\ u \\ v \\ w \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2 \\ \gamma \\ -\sin y \\ \sin x \\ 0 \\ -\sqrt{4\pi}\sin y \\ \sqrt{4\pi}\sin 2x \\ 0 \end{pmatrix},$$

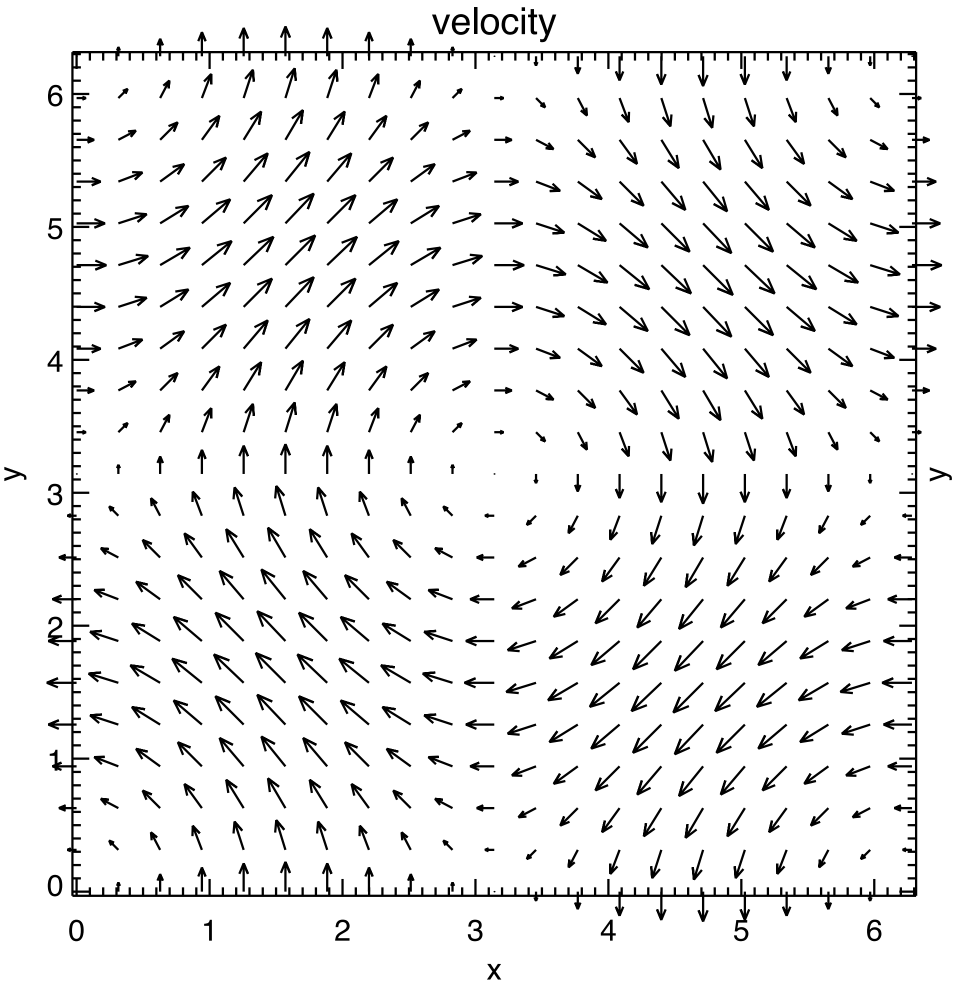
回転

回転

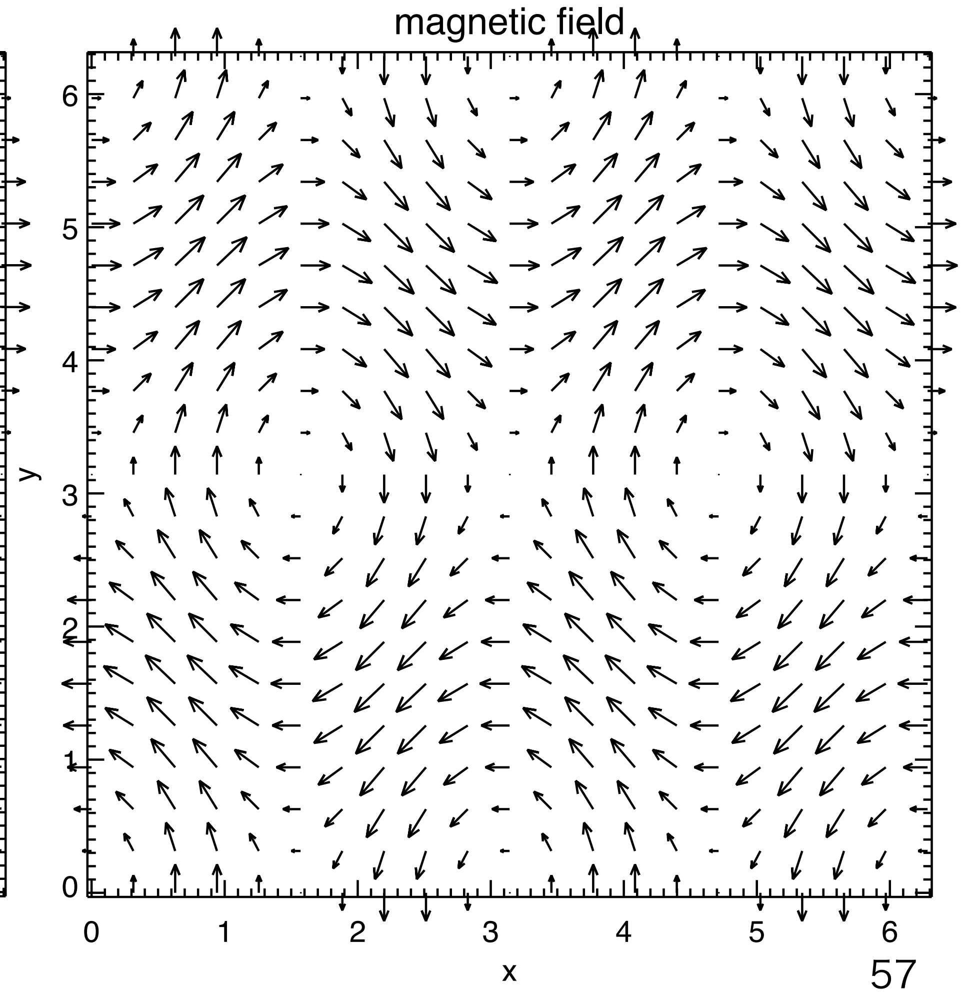
温度分布 p/ρ

Orzag-Tang (1979) vortex problem

初期条件の速度



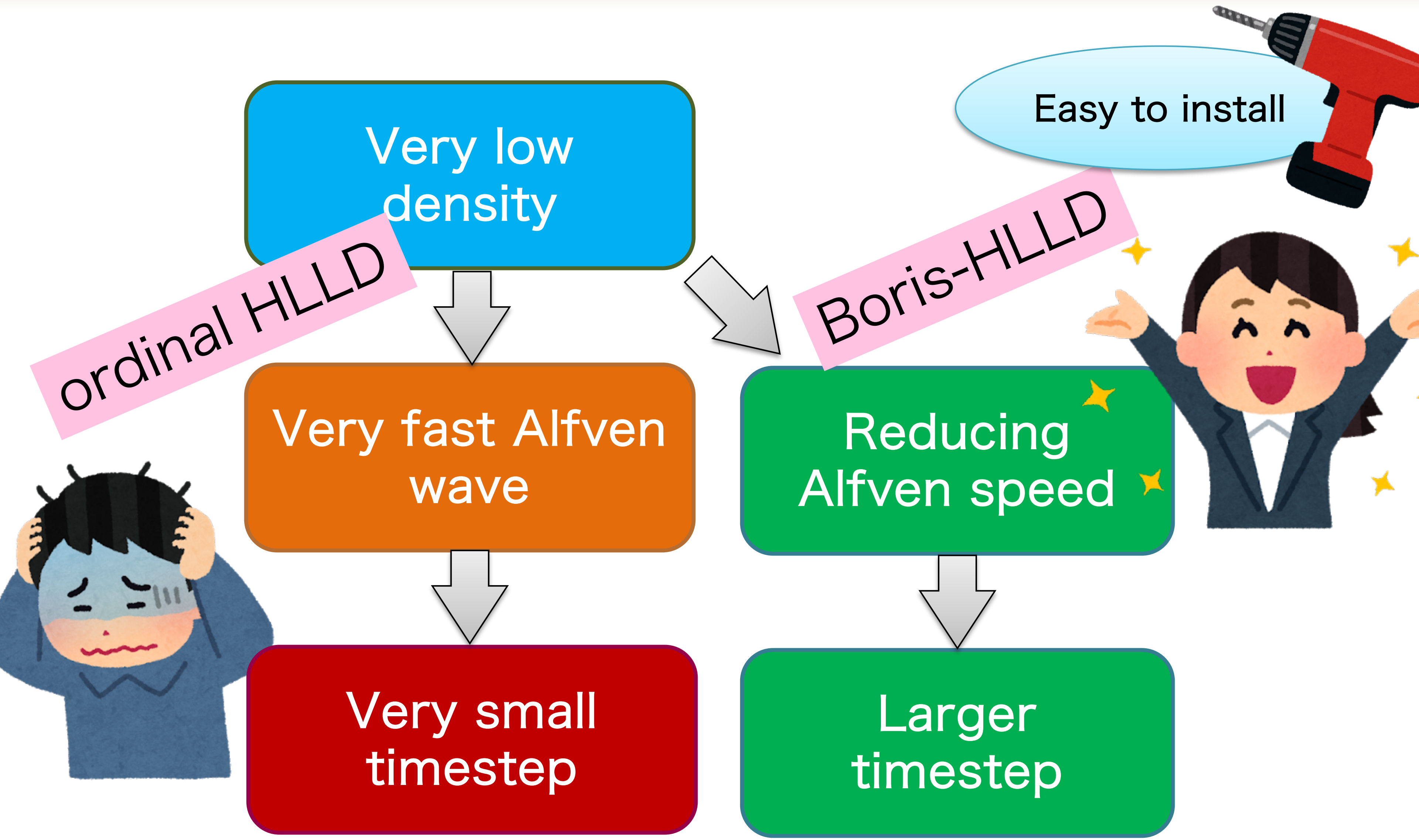
初期条件の磁場



応用

New scheme Boris-HLLD

Troublesome MHD simulations



Ideal MHD equations with Boris correction

Simplified version of Boris (1970) correction
A form of the semi-relativistic MHD equation

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbb{F} = 0,$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ (1 + V_A^2/c^2)\rho\mathbf{u} \\ \mathbf{B} \\ e \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{F} = \begin{pmatrix} \rho\mathbf{u} \\ \rho\mathbf{u}\mathbf{u} + p_T - \mathbf{B}\mathbf{B} \\ \mathbf{u}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u} \\ (e + p_T)\mathbf{u} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{u})\mathbf{B} \end{pmatrix},$$

V_A^2/c^2 additional inertia comes from displacement current.

$$\mathbf{u} = (u, v, w)^T,$$

$$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)^T,$$

$$V_A^2 = \frac{|\mathbf{B}|^2}{\rho},$$

$$e = \rho\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2},$$

$$p_T = p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2},$$

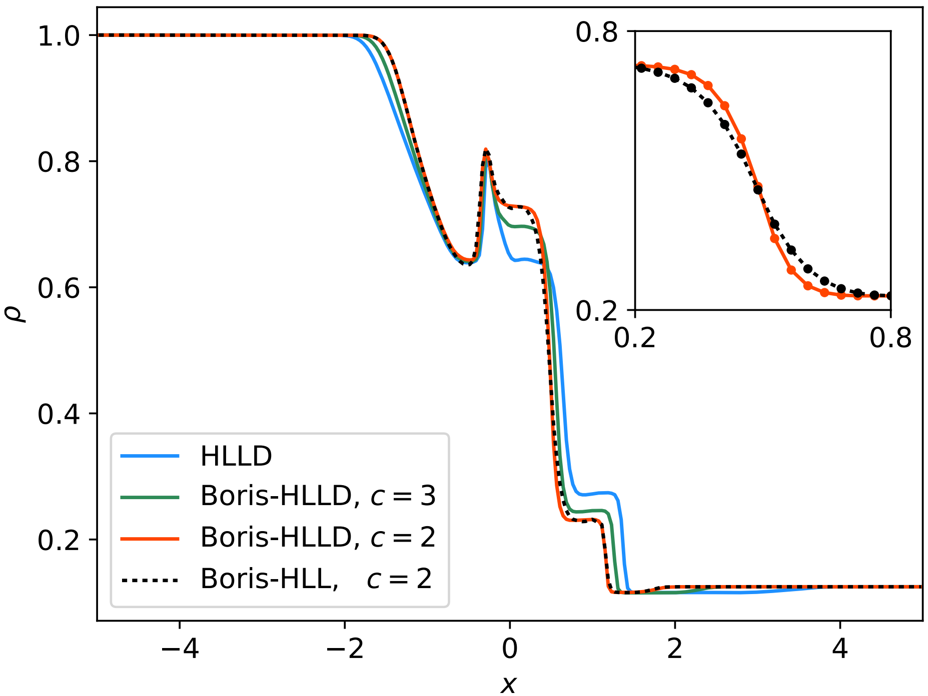
Features of Boris-HLLD solver

- The solver adopts Boris correction.
  - Alfven speed is bounded by c.
    $V_A < c$ (= artificially reduced speed of light)
  - Stable when $c >$ (a few) u
  - You can take large timesteps

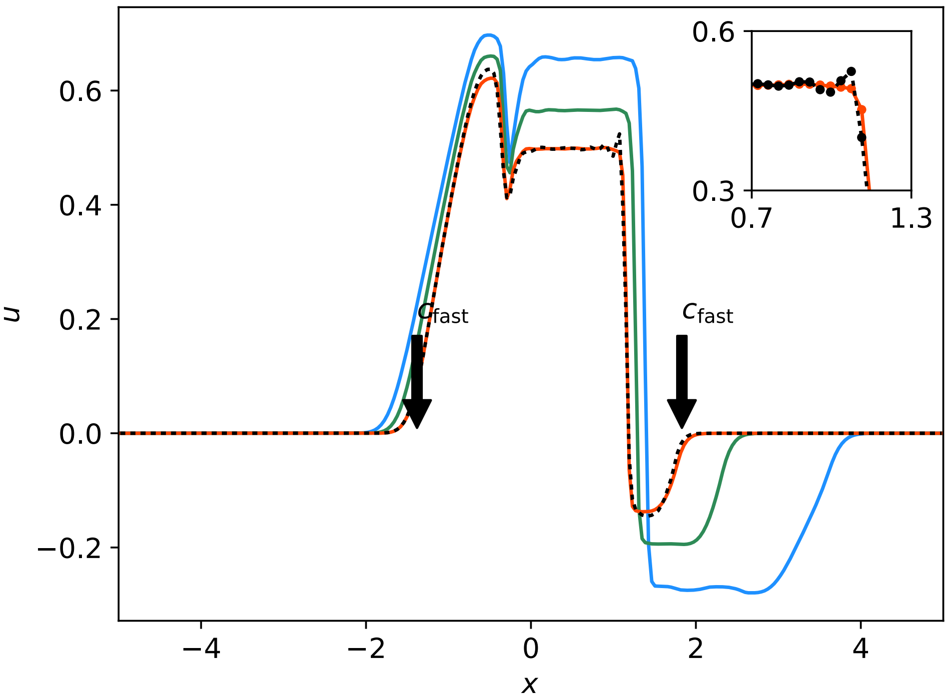
- It is based on HLLD solver.
  - Four intermediate states in Riemann fan
  - Sharp contact discontinuity
  - No overshoot in shock waves

Shock tube problem, Brio & Wo test

Density



Velocity

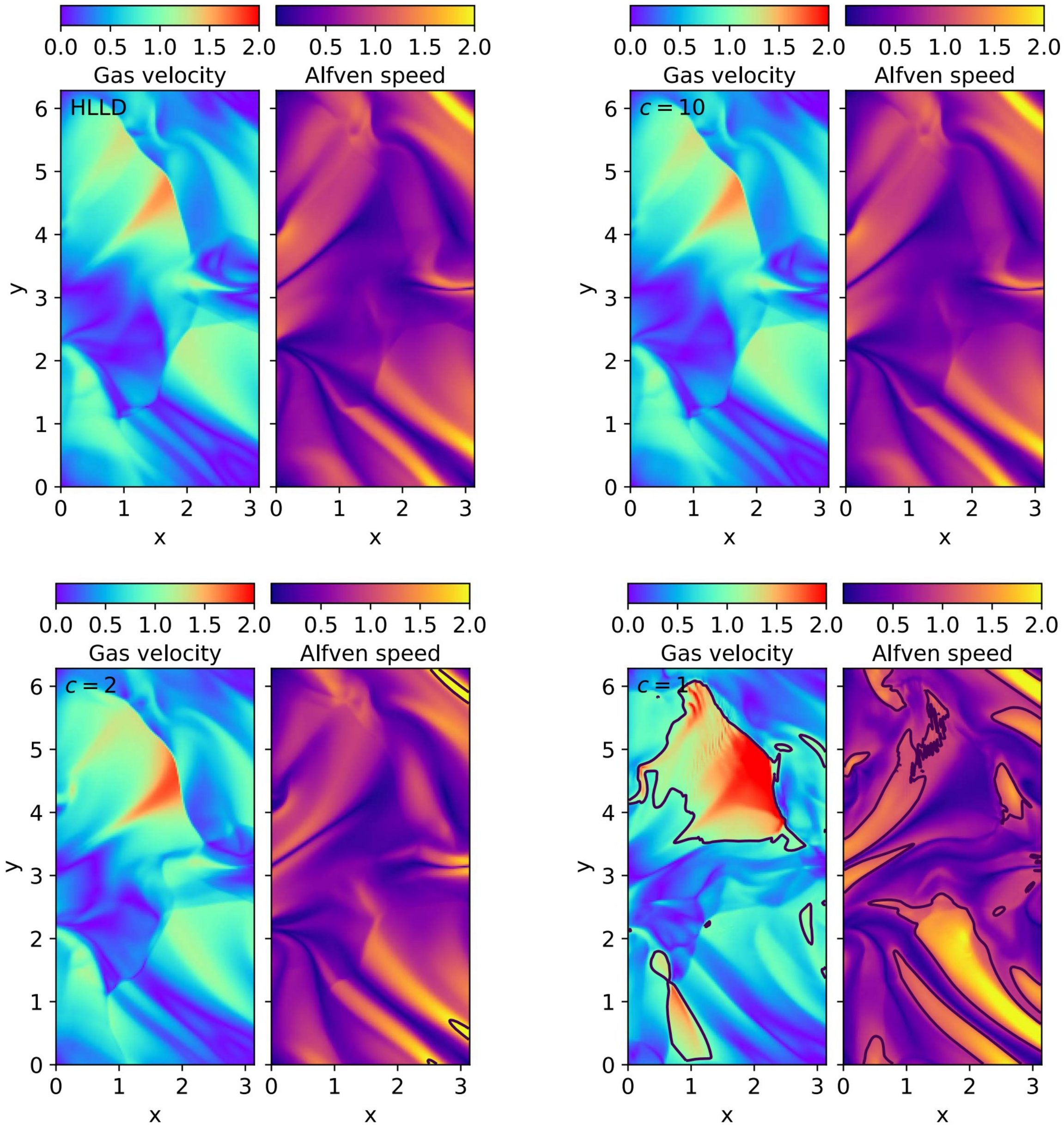


Boris-HLLD captures CD sharply.
Boris-HLLD shows NO overshoot at shock wa
Boris-HLLD reduces fast wave speed.

Orzag-Tang (1979) vortex problem

HLLD
c = ∞

Boris-HLLD
c = 10



Boris-HLLD
c = 2

Boris-HLLD
c = 1

$v_{max} > c$

Crash!

自己重力

自己重力

- ポアソン方程式を解く　$\boldsymbol{g} = -\nabla\phi \quad \nabla^2\phi = 4\pi G\rho\ ,$

$$\frac{\phi_{i-1,j,k} + \phi_{i,j-1,k} + \phi_{i,j,k-1} + \phi_{i+1,j,k} + \phi_{i,j+1,k} + \phi_{i,j,k+1} - 6\phi_{i,j,k}}{\Delta x^2} = 4\pi G\rho_{i,j,k}\ ,$$

離散化したポアソン方程式

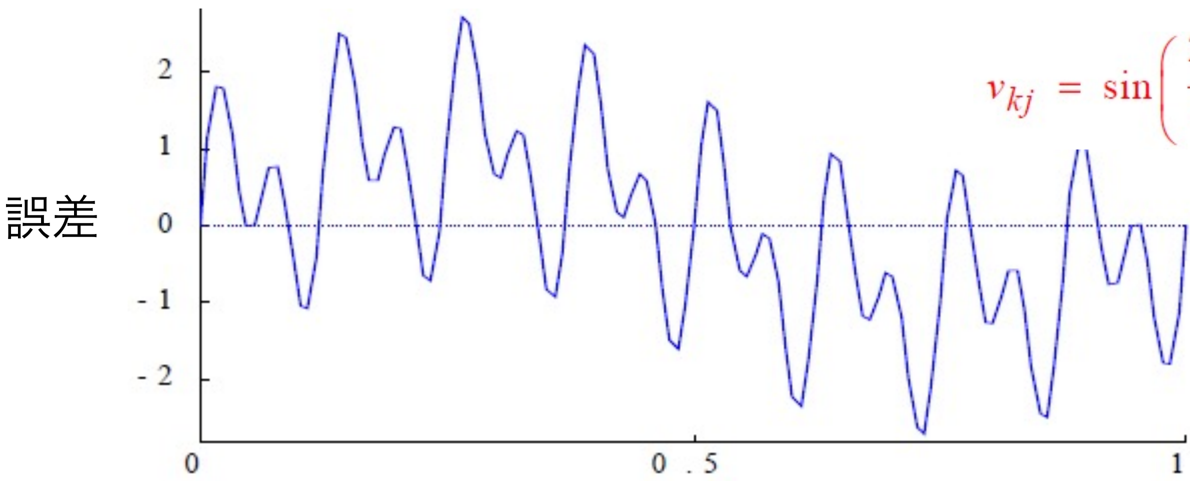
- FFT
  - 高速な直接法
- マルチグリッド
  - 高速な緩和法
  - AMRとの相性が良い
- 共役勾配法
  - クリロフ部分空間法のひとつ
  - 高速な疎行列反転の反復法

緩和法：　短波長モードの収束が速い

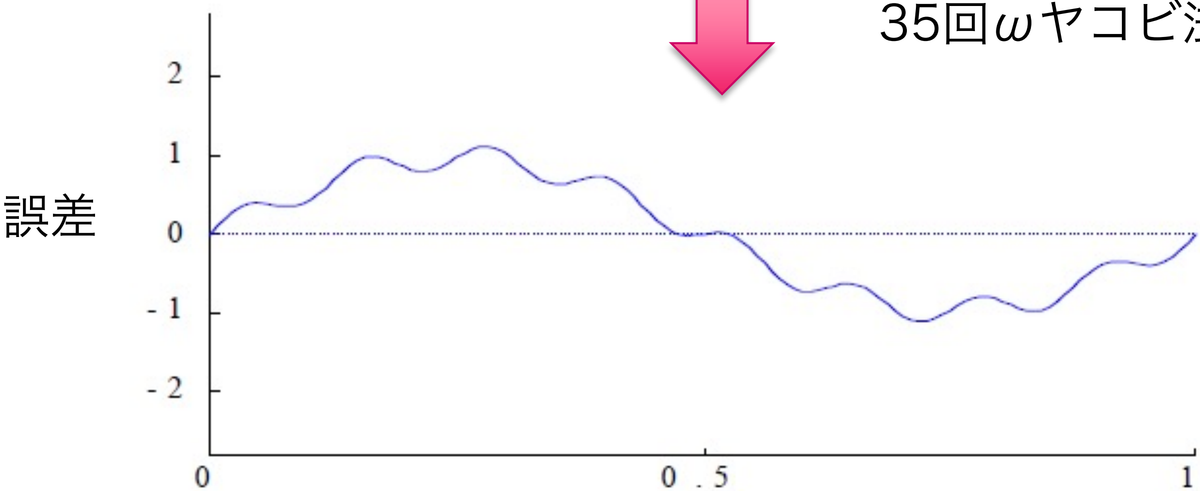
初期の誤差

$$v_{kj} = \sin\left(\frac{2j\pi}{N}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{16j\pi}{N}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{32j\pi}{N}\right)$$

$N = 64$



35回ωヤコビ法を繰り返し



短波長：　収束する
長波長：　残差が残る

A Multigrid Tutorial
Van Emden Henson

Red-black ガウス・ザイデル法

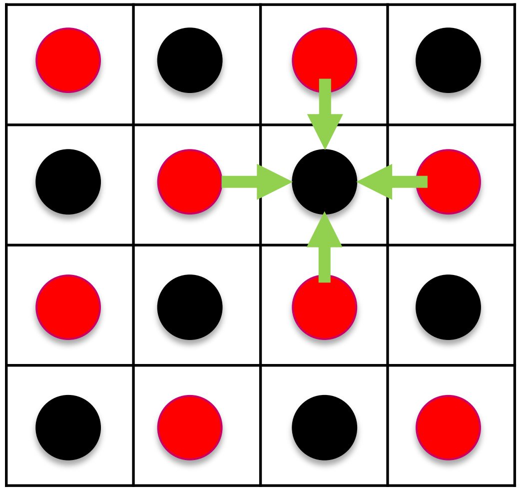
もっとも基本的な緩和法

ポアソン方程式を差分化

$$\frac{\phi_{i-1,j,k} + \phi_{i,j-1,k} + \phi_{i,j,k-1} + \phi_{i+1,j,k} + \phi_{i,j+1,k} + \phi_{i,j,k+1} - 6\phi_{i,j,k}}{\Delta x^2} = 4\pi G \rho_{i,j,k} \ ,$$

緩和法の式

$$\phi_{i,j,k} = (\phi_{i-1,j,k} + \phi_{i,j-1,k} + \phi_{i,j,k-1} + \phi_{i+1,j,k} + \phi_{i,j+1,k} + \phi_{i,j,k+1} - 4\pi G \rho_{i,j,k} \Delta x^2)/6$$



赤を使って黒を更新

黒を使って赤を更新

マルチグリッド法

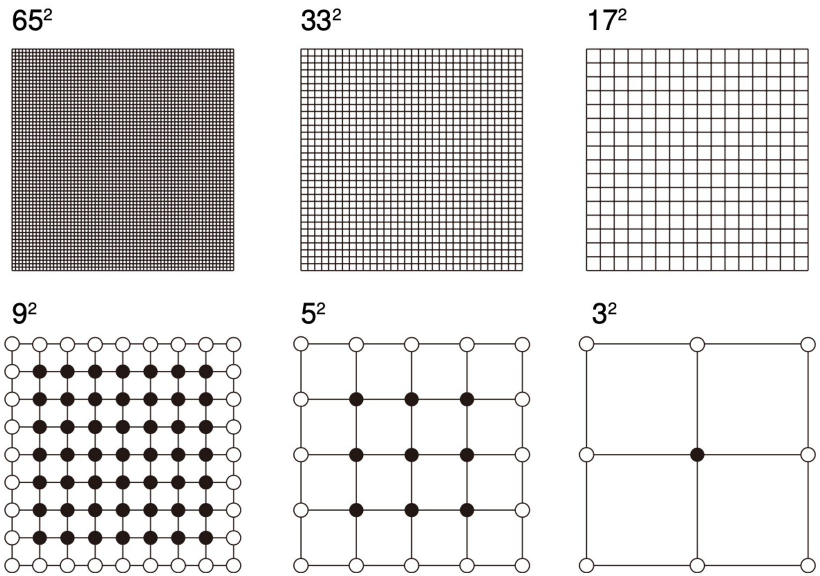


図 **4.1**　マルチグリッド法における階層的な格子。2 次元の例を示す。65^2 のグリッドの重力ポテンシャルを求めるとき、$33^2 \cdots 3^2$ の作業グリッドを用意する。下段の図では、未知数を定義するグリッドポイントを黒丸で、境界条件を定義するグリッドポイントを白丸で示す。

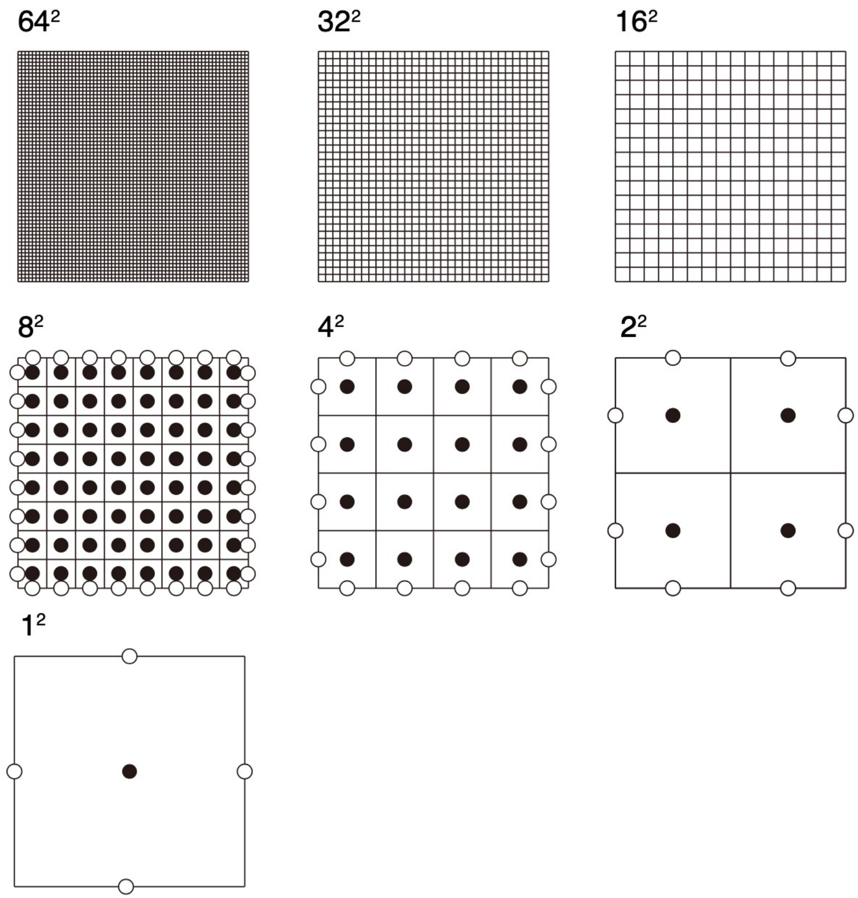


図 **4.2**　有限体積法に適したマルチグリッド法における階層的な格子。2 次元の例を示す。64^2 のグリッドの重力ポテンシャルを求めるとき、$32^2 \cdots 1^2$ の作業グリッドを用意する。中断と下段の図では、未知数を定義するセル中心を黒丸で、境界条件を定義するセル境界を白丸で示す。

様々な解像度の格子を準備
様々な波長の誤差を高速に収束させる

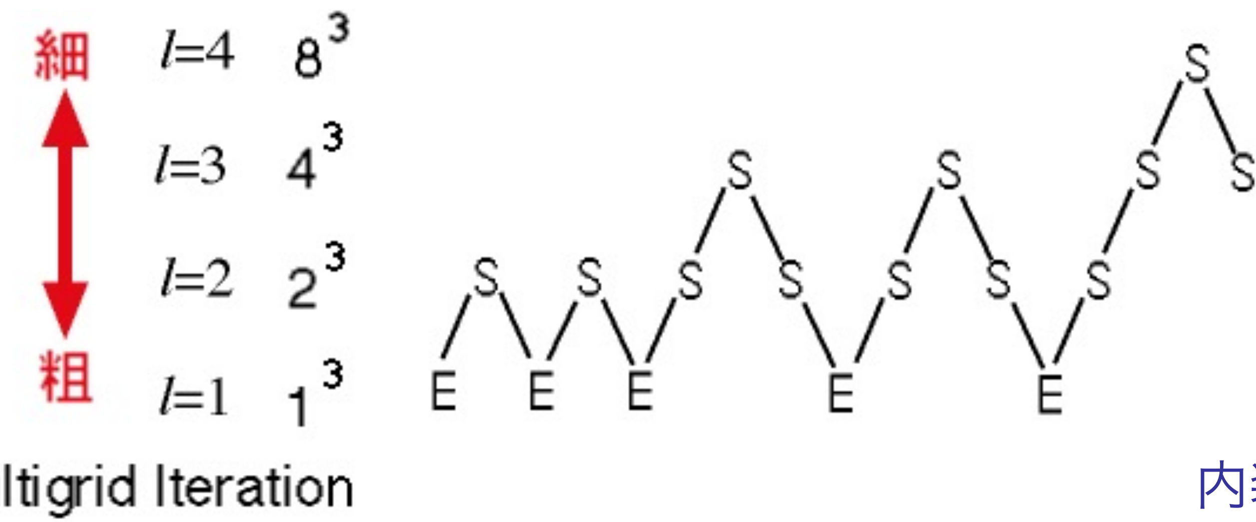
一様格子におけるマルチグリッド法

S = Smoothing
GS法で収束

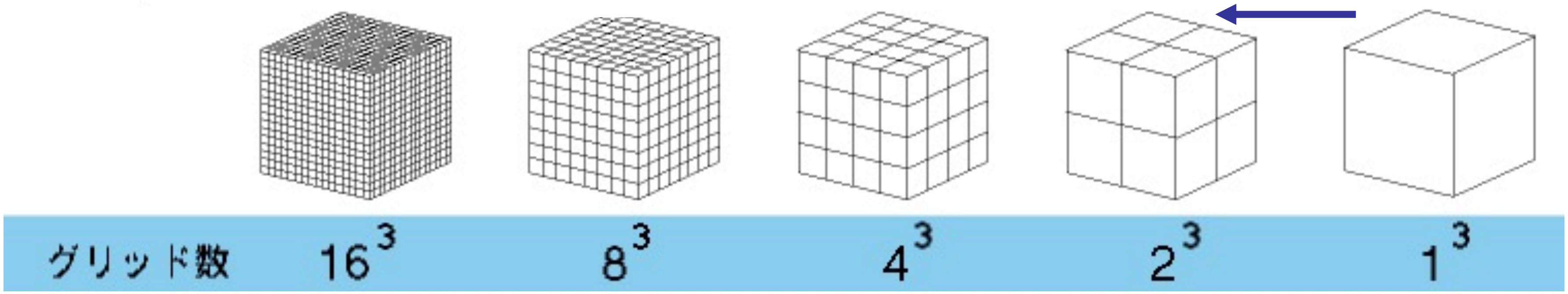
E = 厳密解を求める

／ = Inerpolation
内挿

＼ = Restriction
間引き



内装: 良い初期値



実格子 ← 作業格子 →

演算回数 ∝ 実格子のセル数

線形偏微分方程式の解法

線形楕円型方程式：　$L\,u=f$
（より一般的には行列反転）

Coarse grid correction (CGC)

添字　h　…. 細い格子
添字　H　…. 粗い格子

$u_h^m \xrightarrow{\text{smooth}} \bar{u}_h^m \longrightarrow \bar{d}_h^m = f_h - L_h \bar{u}_h^m$

$\bar{d}_h^m \xrightarrow{I_h^H} \bar{d}_H^m$　I_h^H　間引き (restriction)

$\bar{d}_H^m \longrightarrow \boxed{L_H \hat{v}_H^m = \bar{d}_H^m}$

誤差を解く方程式

$\hat{v}_H^m \xrightarrow{I_H^h} \hat{v}_h^m$　I_H^h　内挿 (prolongation)

$\hat{v}_h^m \longrightarrow \bar{u}_h^m + \hat{v}_h^m \xrightarrow{\text{smooth}} u_h^{m+1}$

これを階層的に施す。