

物理学特殊講義I(MC向け集中) MHD編

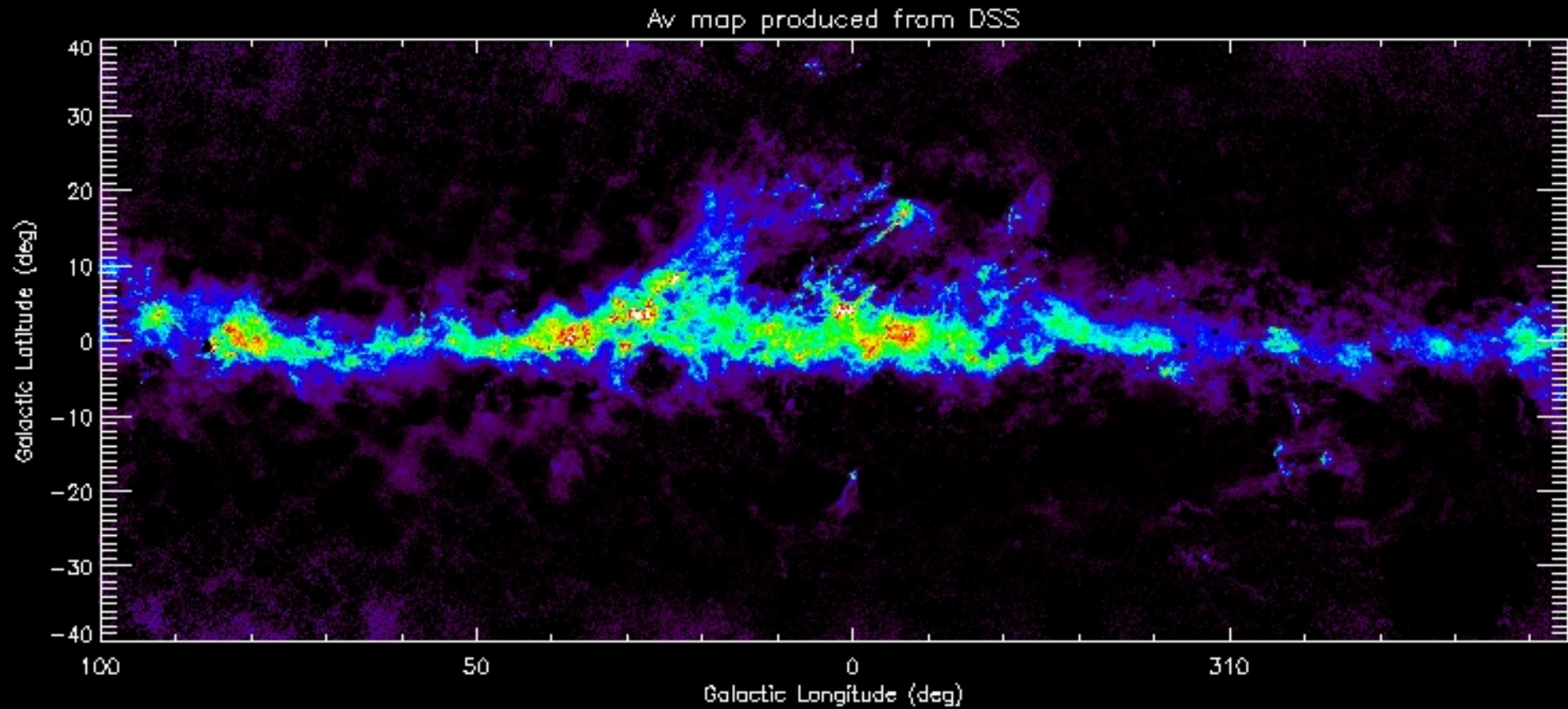
松本倫明(法政大学人間環境学部)

圧縮性流体を使う人は

- ジェット機を作る人
 - ロケットを作る人
 - 爆弾を作る人
 - 天文学者
-
- 圧縮性の磁気流体力学(MHD)を使う人は・・・

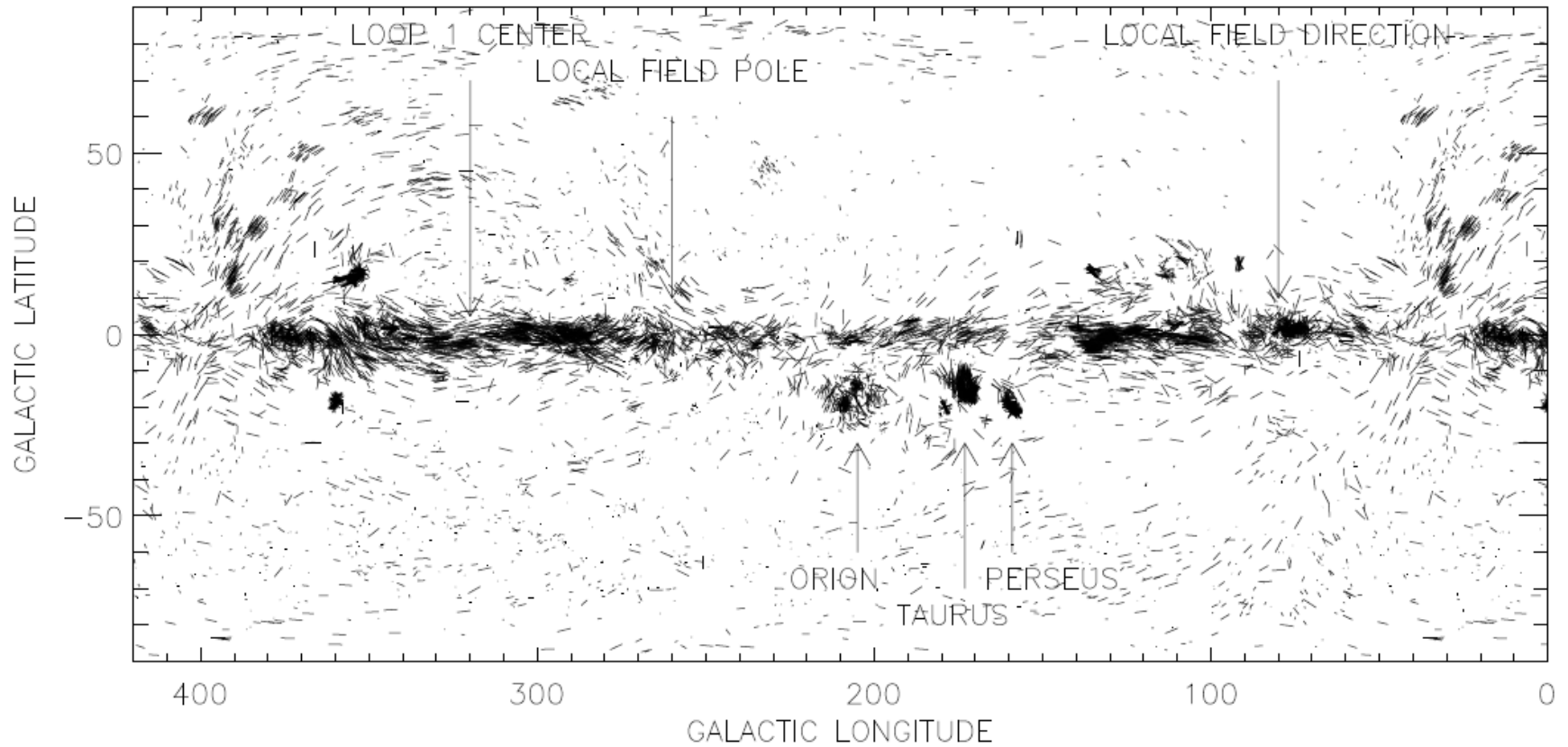
星形成と磁場

銀河面とダスト



Dobashi et al. (2006)

銀河面付近の偏光

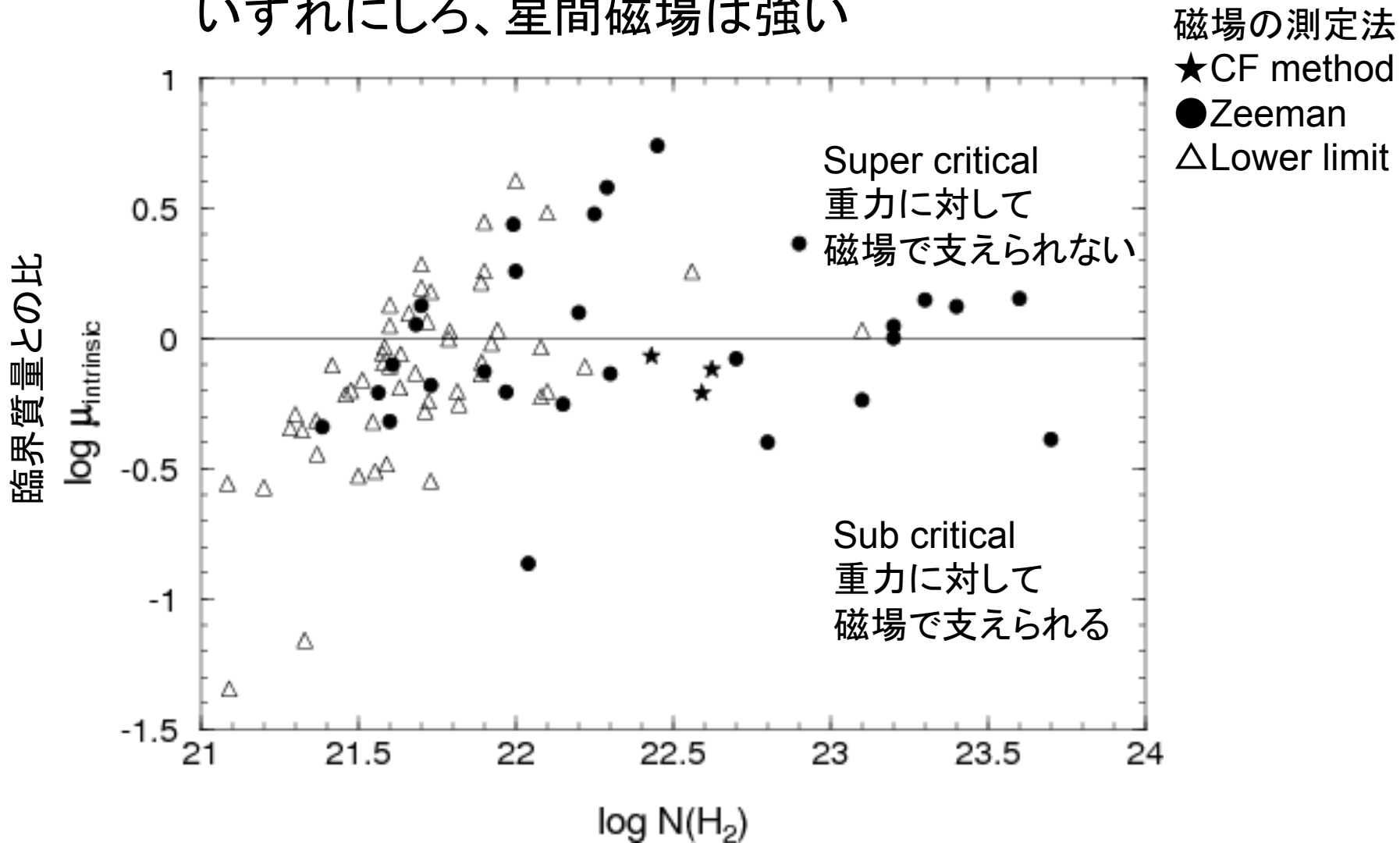


Heiles & Crutcher 2007

いろいろな分子雲の磁場

Supercritical vs subcritical

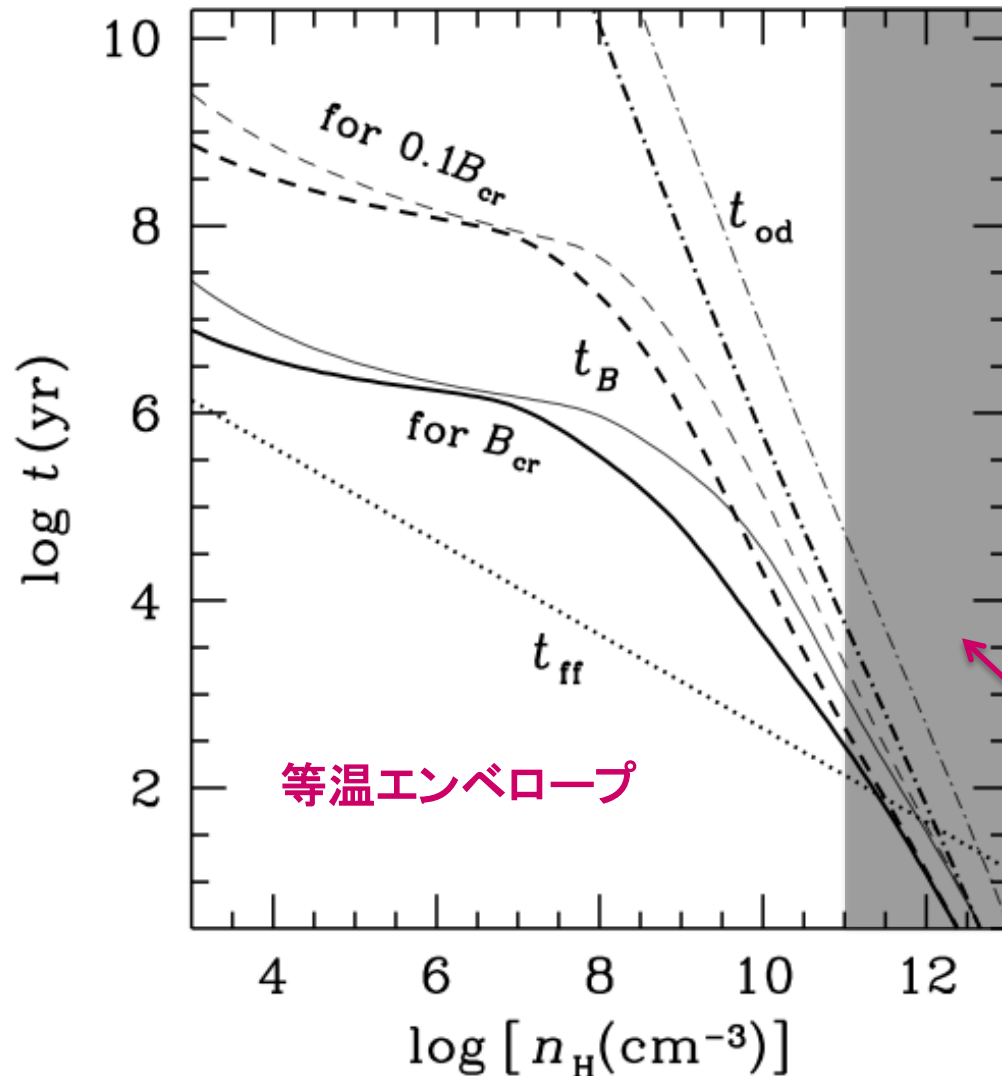
いずれにしろ、星間磁場は強い



水素分子ガスの柱密度

Heiles & Crutcher 05

磁場の散逸過程の重要性

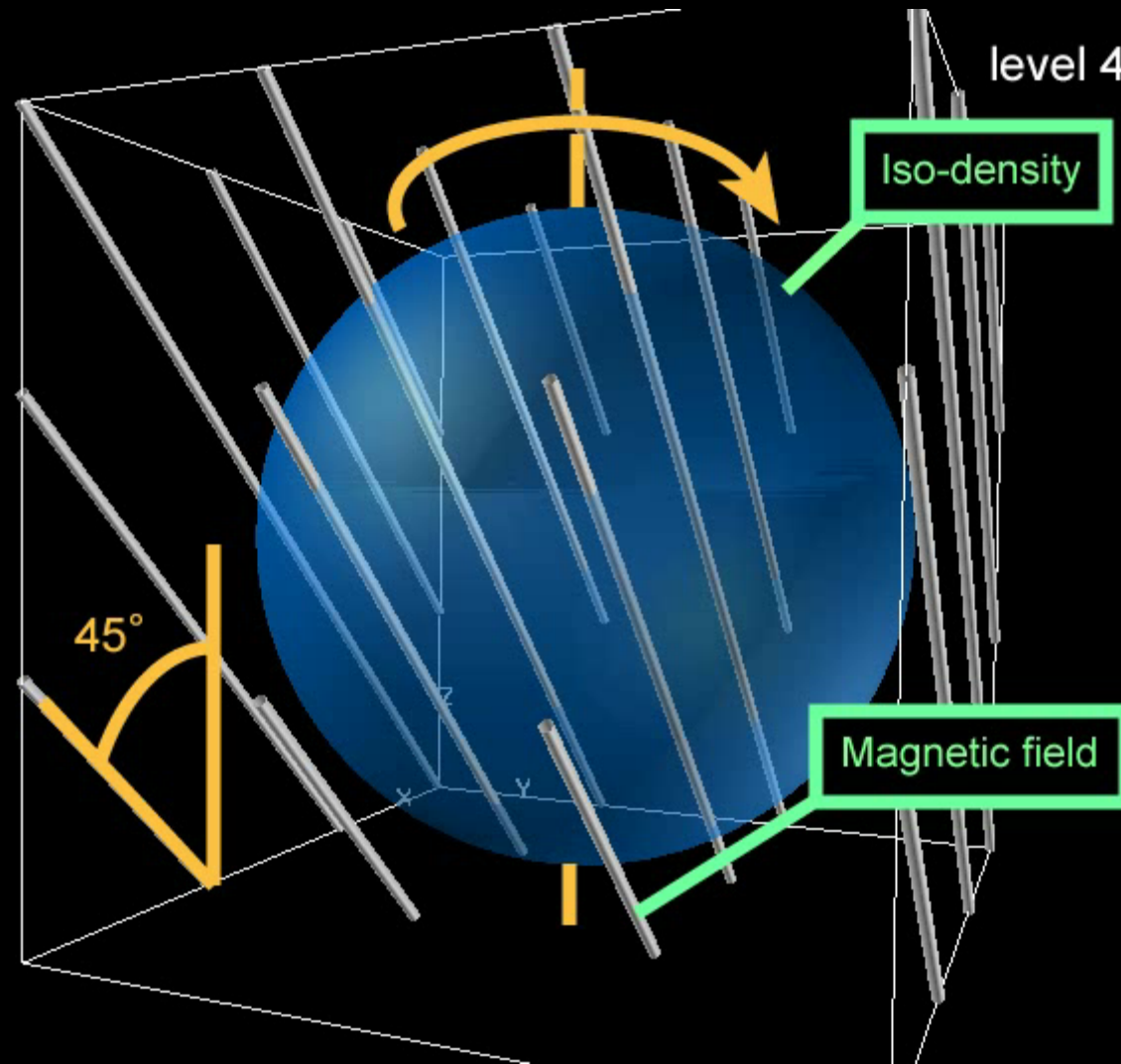


- 高密度では $t_B < t_{ff}$
- ファーストコアでは $t_{ff} < t_{dy}$
(圧力サポート)
- ゆえに $t_B < t_{dy}$
- 天体の進化において磁場の散逸は重要

ファーストコア

分子雲コア⇒原始星(ファーストコア)

Matsumoto & Tomisaka (2004)

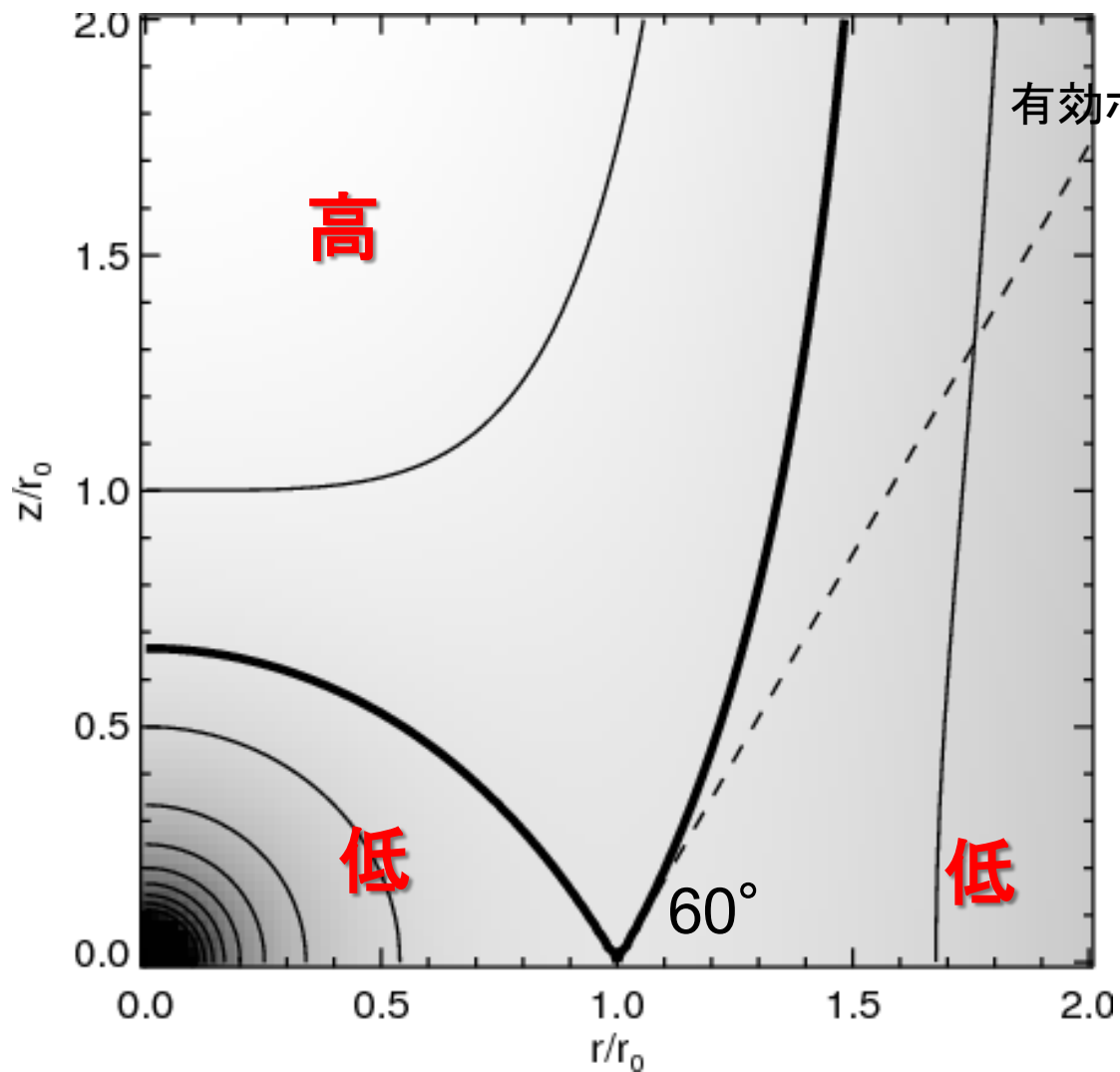


ジェット・アウトフロー加速メカニズムの分類

- 磁気遠心力風
 - 磁場が強い場合
 - Blandford & Payne (1982)
 - Pudritz & Norman (1986)
- 磁気圧加速 (Tower jet)
 - 磁場が弱い場合
 - Shibata & Uchida (1985)
 - Lynden-bell (1996)
- 星風

磁気遠心力風の仕掛け

$$\Phi_{eff} = -\frac{GM}{r_0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + \frac{r_0}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right]$$



MHD近似 ローレンツ力=磁気圧+磁気張力

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad \text{ローレンツ力}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

$$= \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

マックスウェル方程式(アンペールの法則)

$$= -\frac{1}{8\pi} \nabla B^2 + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad \text{磁気圧勾配+磁気張力}$$

$$= -\nabla \cdot \left(\frac{B^2}{8\pi} \mathbf{I} - \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}^T}{4\pi} \right) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B})$$

磁気圧勾配 磁気張力

誘導方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

マックスウェル方程式

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

オームの法則

\mathbf{E} と \mathbf{J} を消去すると

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B})$$

理想MHDの誘導方程式

オーム散逸

ただし $\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$

他にも中性粒子とイオンの速度差を考えると両極性拡散が現れたり、

MHD方程式

理想MHDの寄与

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (30)$$

オーム散逸の寄与

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g}, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{4\pi\eta}{c} \mathbf{J} \right), \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot \left[\left(\rho E + P + \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi} \right) \mathbf{v} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})}{4\pi} + \frac{\eta}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right] = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \quad (33)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (34)$$

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T,$$

$$E = \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)} \frac{P}{\rho} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi\rho},$$

$$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)^T,$$

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B},$$

$$\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)^T = -\nabla \Phi,$$

MHD方程式(保存形)

黄色: MHDの寄与

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{v} \mathbf{v}^T + \left(P + \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi} \right) I - \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}^T}{4\pi} \right] = \rho \mathbf{g}, \quad (41)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \mathbf{v}^T) = 0, \quad (42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot \left[\left(\rho E + P + \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi} \right) \mathbf{v} - \frac{\mathbf{B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})}{4\pi} \right] = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \quad (43)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (44)$$

MHD方程式 (保存形・成分表示)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z} = \mathbf{S}, \quad (45)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (46)$$

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, B_x, B_y, B_z, \rho E)^T, \quad (47)$$

$$\mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P + |\mathbf{B}|^2 / 8\pi - B_x^2 / 4\pi \\ \rho v_x v_y - B_x B_y / 4\pi \\ \rho v_x v_z - B_x B_z / 4\pi \\ 0 \\ v_x B_y - v_y B_x \\ v_x B_z - v_z B_x \\ (\rho E + P + |\mathbf{B}|^2 / 8\pi) v_x - B_x (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) / 4\pi \end{pmatrix}, \quad (48)$$

アルフヴェン波など

Alfvén speed

$$c_A = \left(\frac{B^2}{4\pi\rho} \right)^{1/2} \quad (3)$$

Alfvén wave

$$v_A = c_A k_{\parallel} / k \quad (4)$$

Fast wave

$$v_{\text{fast}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[c_s^2 + c_A^2 + \sqrt{(c_s^2 + c_A^2)^2 - 4c_s^2 c_A^2 k_{\parallel}^2 / k^2} \right]^{1/2} \quad (5)$$

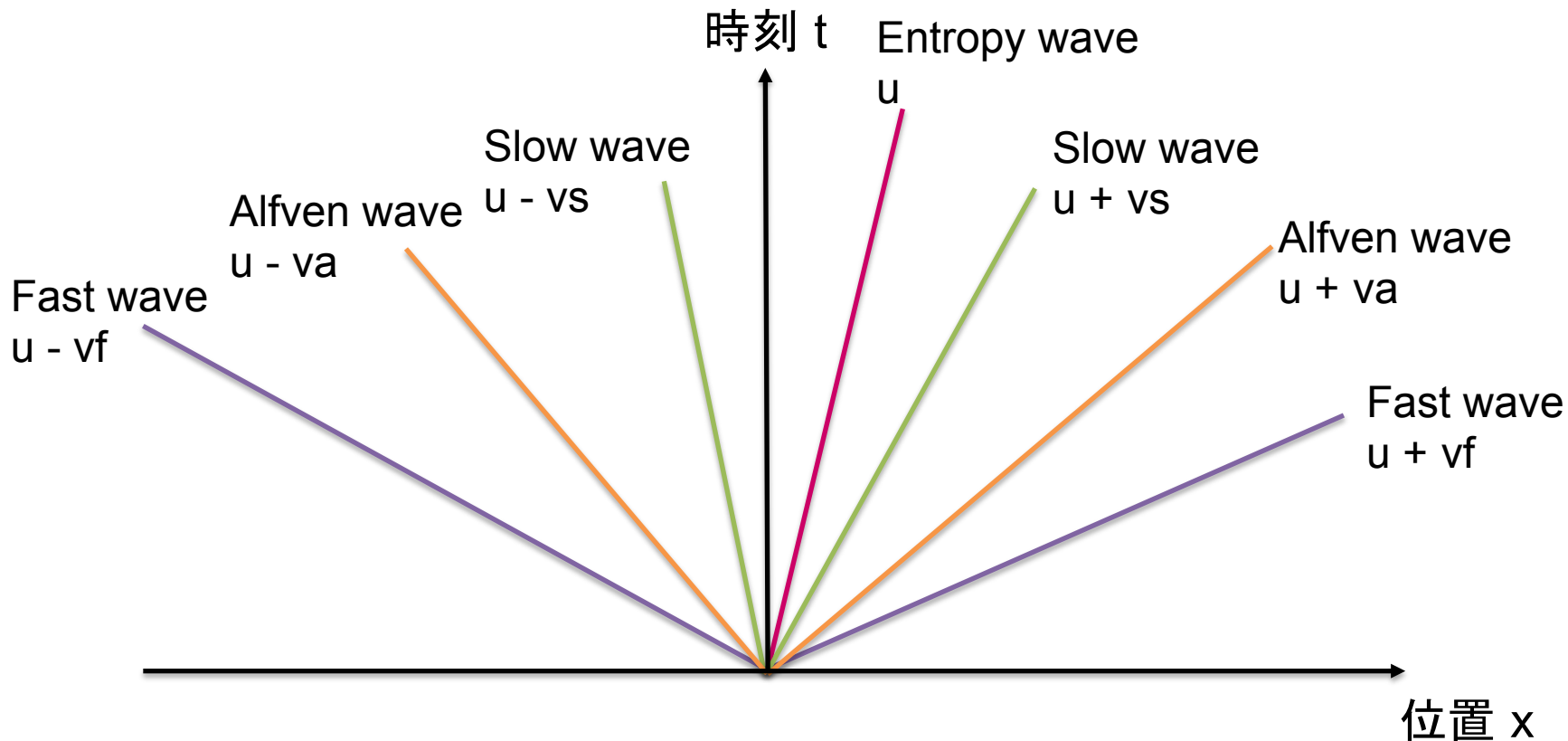
Slow wave

$$v_{\text{slow}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[c_s^2 + c_A^2 - \sqrt{(c_s^2 + c_A^2)^2 - 4c_s^2 c_A^2 k_{\parallel}^2 / k^2} \right]^{1/2} \quad (6)$$

where $k_{\parallel} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} / B$

MHDの波は7個

MHD方程式は8成分 - 1個の束縛条件 ($\text{div } \mathbf{B} = 0$) = 7個の自由度



フリードリックスダイアグラム MHDの波紋

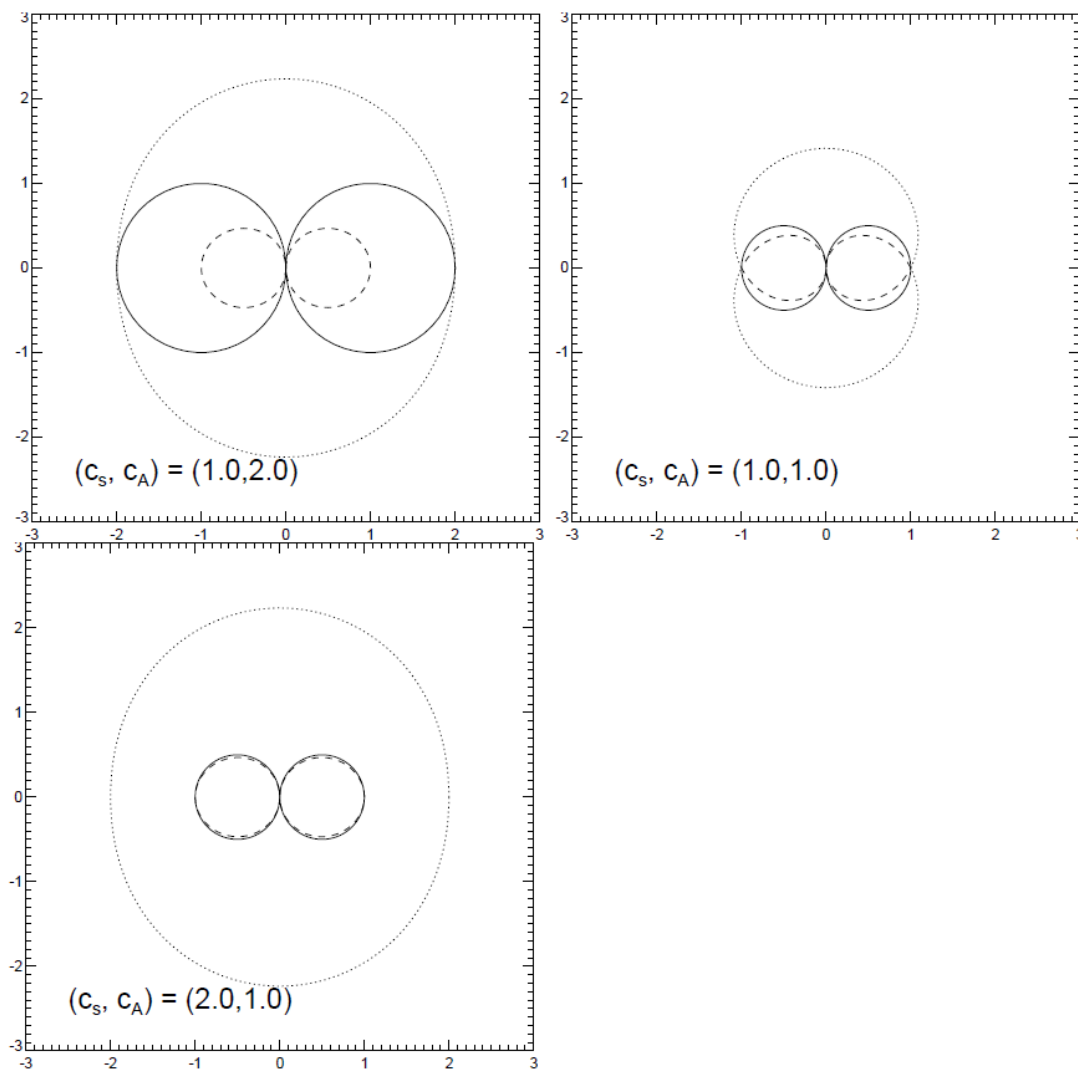
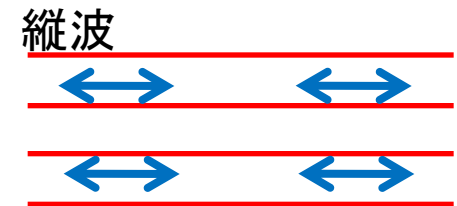
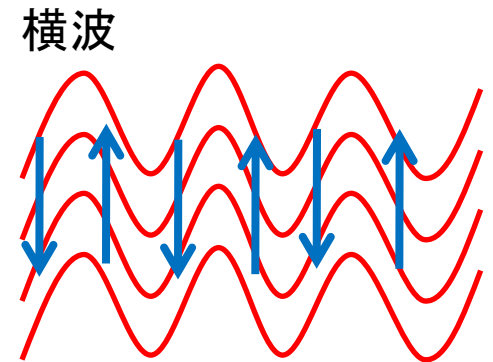
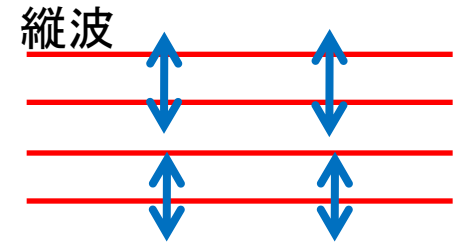
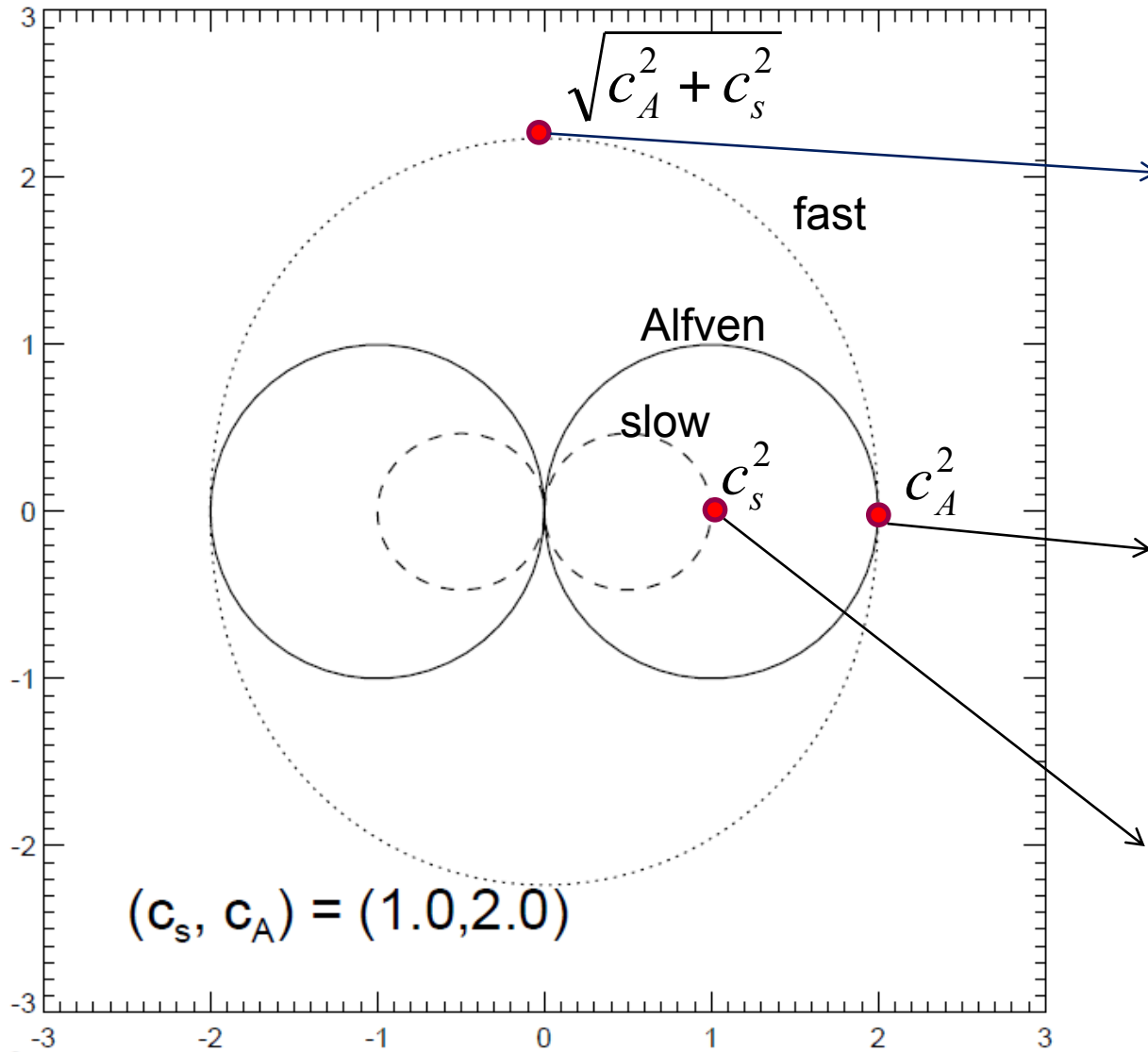
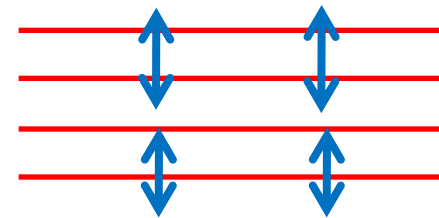
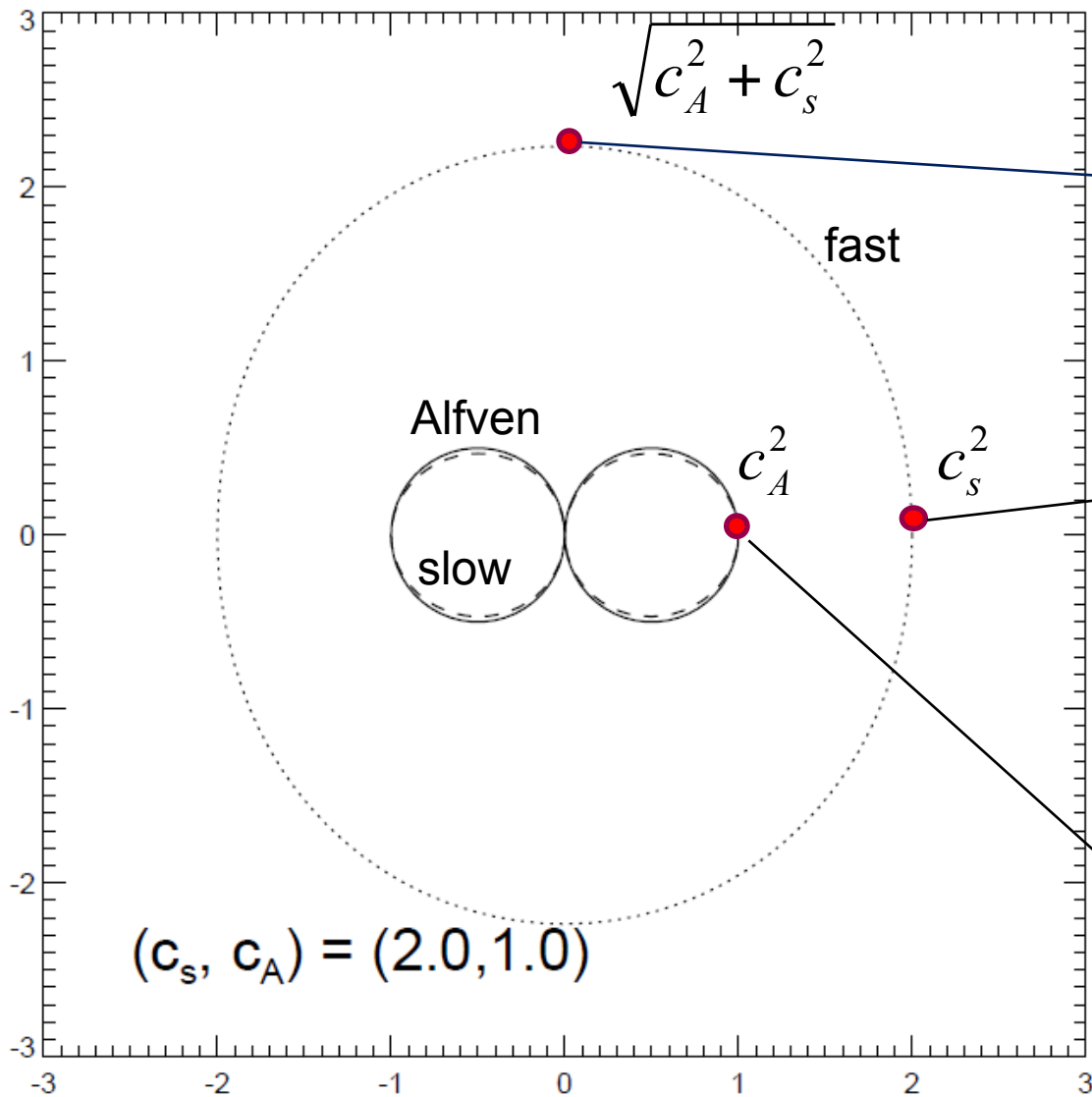


図 11: フリードリックスダイアグラム。点線は fast wave, 実線は Alfvén wave, 破線は slow wave の位相速度を示す。磁場は x 方向 (水平方向) に分布している。

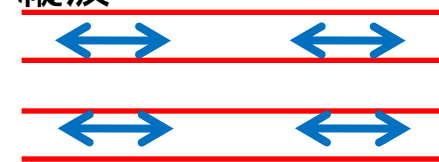
CA > CS



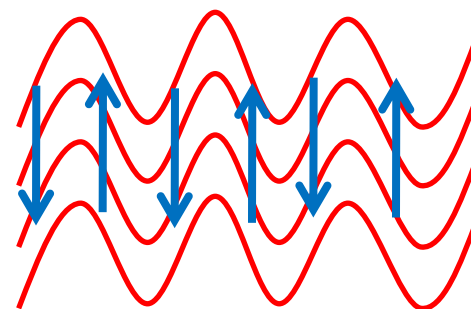
CA < CS



縱波

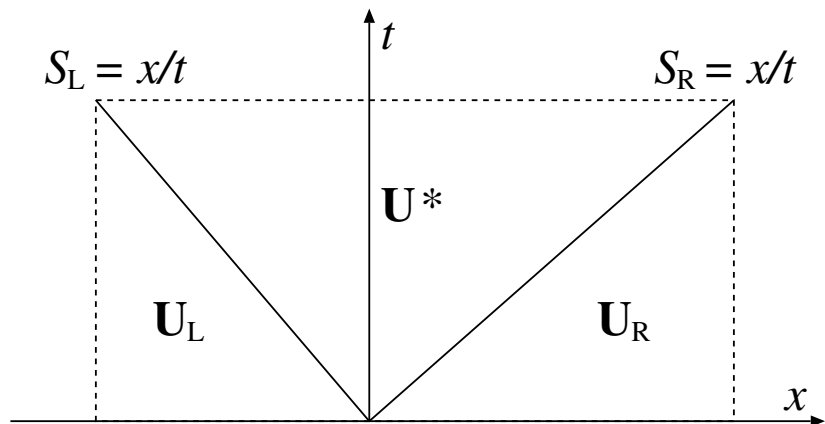


橫波



HLLの基本 (黒板で)

Harten, Lax, van Leer 1983



$$\mathbf{F}_{\text{HLL}} = \begin{cases} \mathbf{F}_L & \text{if } S_L > 0, \\ \mathbf{F}^* & \text{if } S_L \leq 0 \leq S_R, \\ \mathbf{F}_R & \text{if } S_R < 0. \end{cases}$$

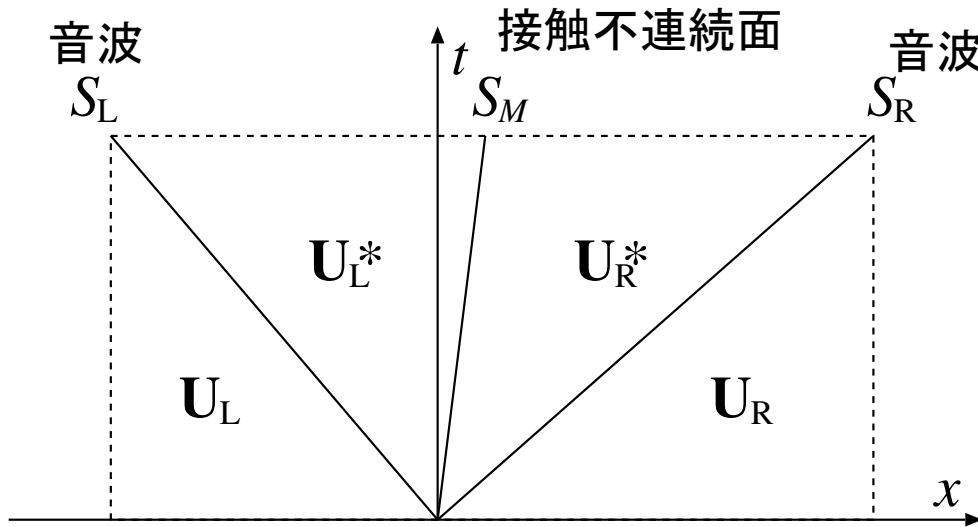
$$\mathbf{U}^* = \frac{S_R \mathbf{U}_R - S_L \mathbf{U}_L - \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L}{S_R - S_L}.$$

$$\mathbf{F}^* = \frac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R + S_R S_L (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{S_R - S_L}.$$

接触不連続面を分解しないのでドロドロの数値粘性

板書

HLLC 接触不連続面を扱えるように(黒板で)



Toro+ 94

$$\mathbf{F}_{\text{HLLC}} = \begin{cases} \mathbf{F}_L & \text{if } S_L > 0, \\ \mathbf{F}_L^* & \text{if } S_L \leq 0 \leq S_M, \\ \mathbf{F}_R^* & \text{if } S_M \leq 0 \leq S_R, \\ \mathbf{F}_R & \text{if } S_R < 0. \end{cases}$$

HLLから

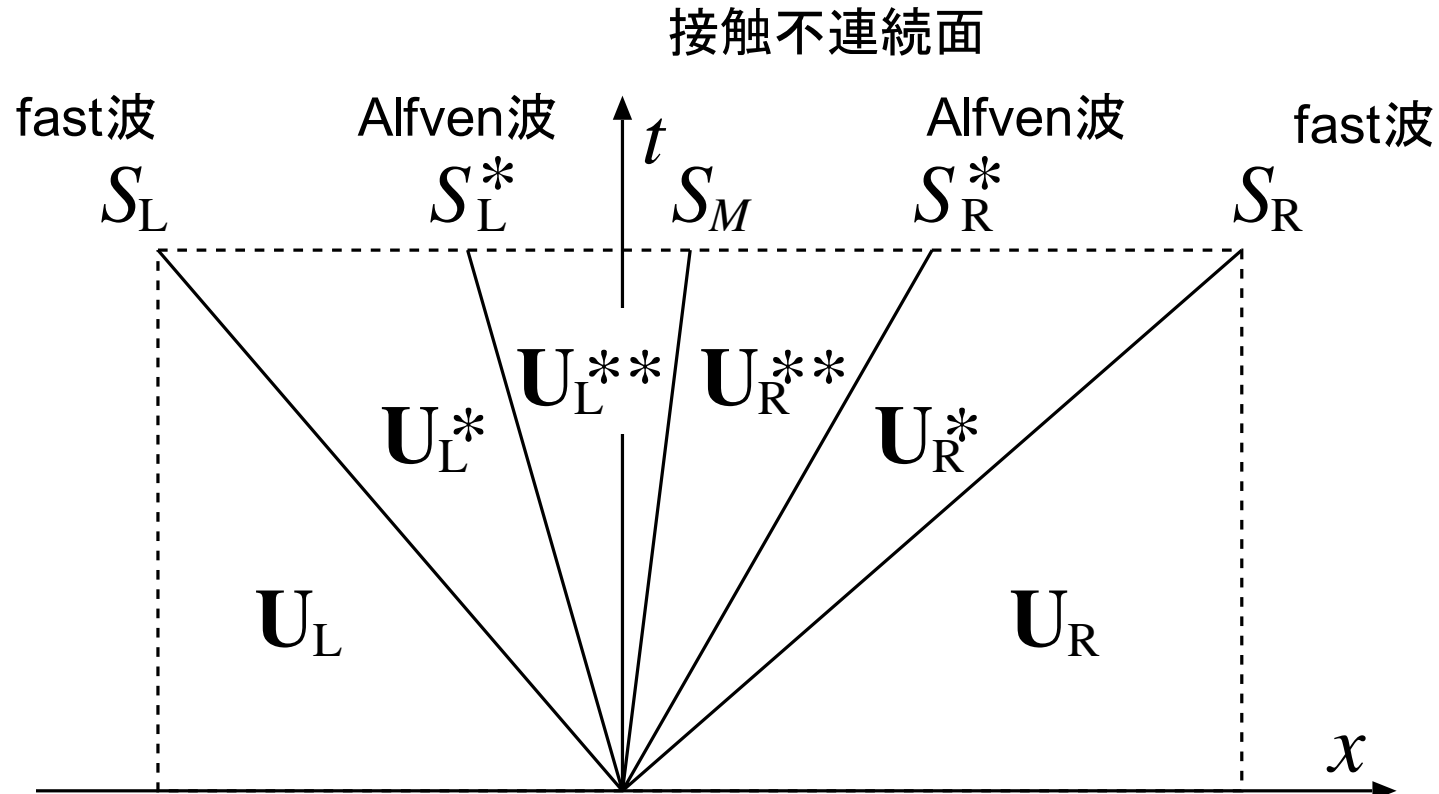
$$S_M = \frac{(\rho u)^*}{\rho^*} = \frac{(S_R - u_R)\rho_R u_R - (S_L - u_L)\rho_L u_L - p_R + p_L}{(S_R - u_R)\rho_R - (S_L - u_L)\rho_L},$$

$$S_\alpha \mathbf{U}_\alpha^* - \mathbf{F}_\alpha^* = S_\alpha \mathbf{U}_\alpha - \mathbf{F}_\alpha, \quad \text{Jump condition}$$

S_L と S_R の jump conditionにより U^* と F^* を求める。

板書

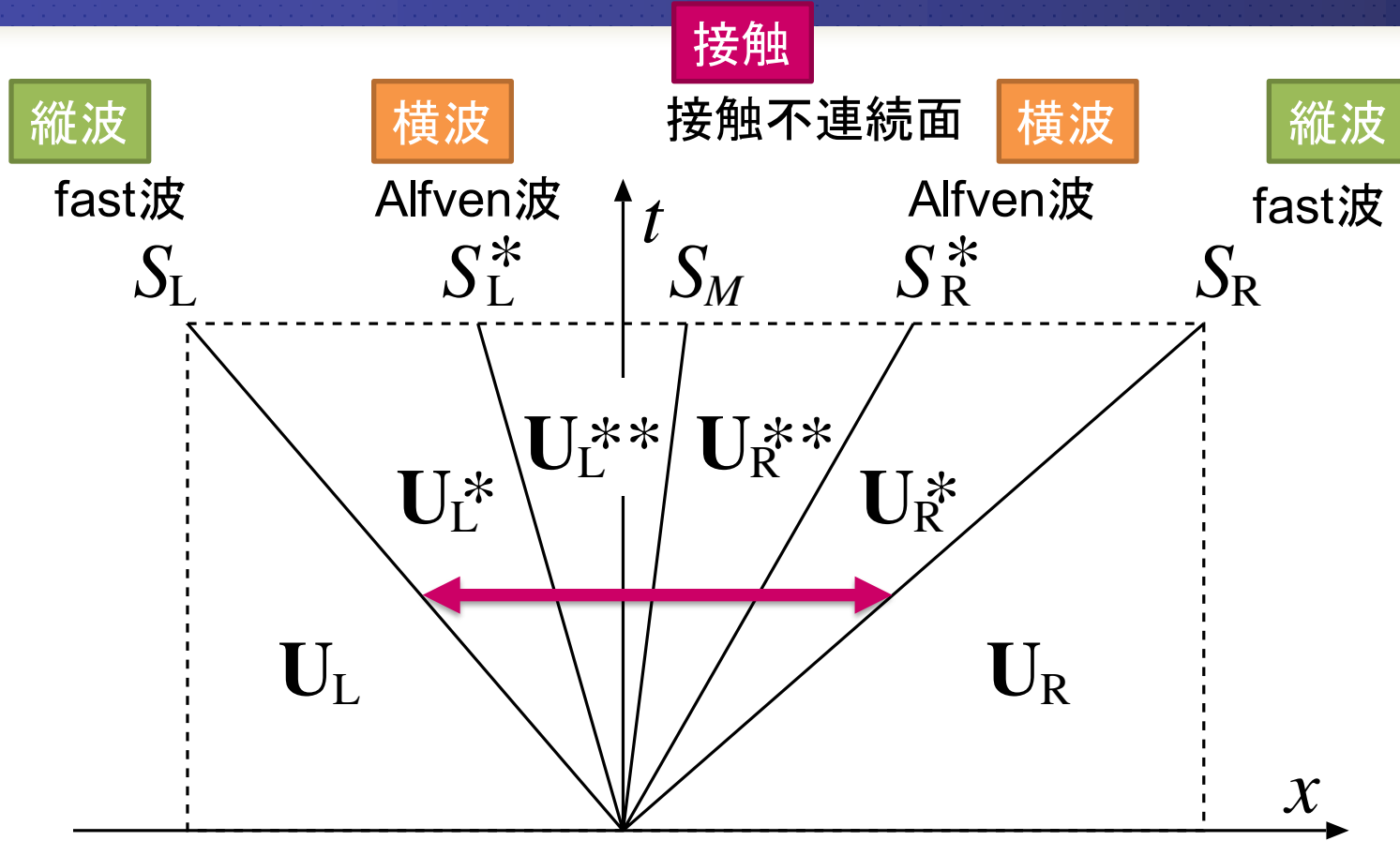
HLLD: HLLCにAlfven波を追加



5個の波で近似する。

$$F_{\text{HLLD}} = \begin{cases} F_L & \text{if } S_L > 0, \\ F_L^* & \text{if } S_L \leq 0 \leq S_L^*, \\ F_L^{**} & \text{if } S_L^* \leq 0 \leq S_M, \\ F_R^{**} & \text{if } S_M \leq 0 \leq S_R^*, \\ F_R^* & \text{if } S_R^* \leq 0 \leq S_R, \\ F_R & \text{if } S_R < 0. \end{cases}$$

HLLD 磁場を扱えるように



仮定

リーマンファンの中で

S_M 移流速度

一定

p_T^* 圧力

$$S_M = \frac{(S_R - u_R)\rho_R u_R - (S_L - u_L)\rho_L u_L - p_{Tr} + p_{Tl}}{(S_R - u_R)\rho_R - (S_L - u_L)\rho_L},$$

HLLCと同じ

jump condition を適用して状態を求める

$$S_L(\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L) = \mathbf{F}_L^* - \mathbf{F}_L$$

$$\mathbf{U}_L \implies \mathbf{U}_L^*$$

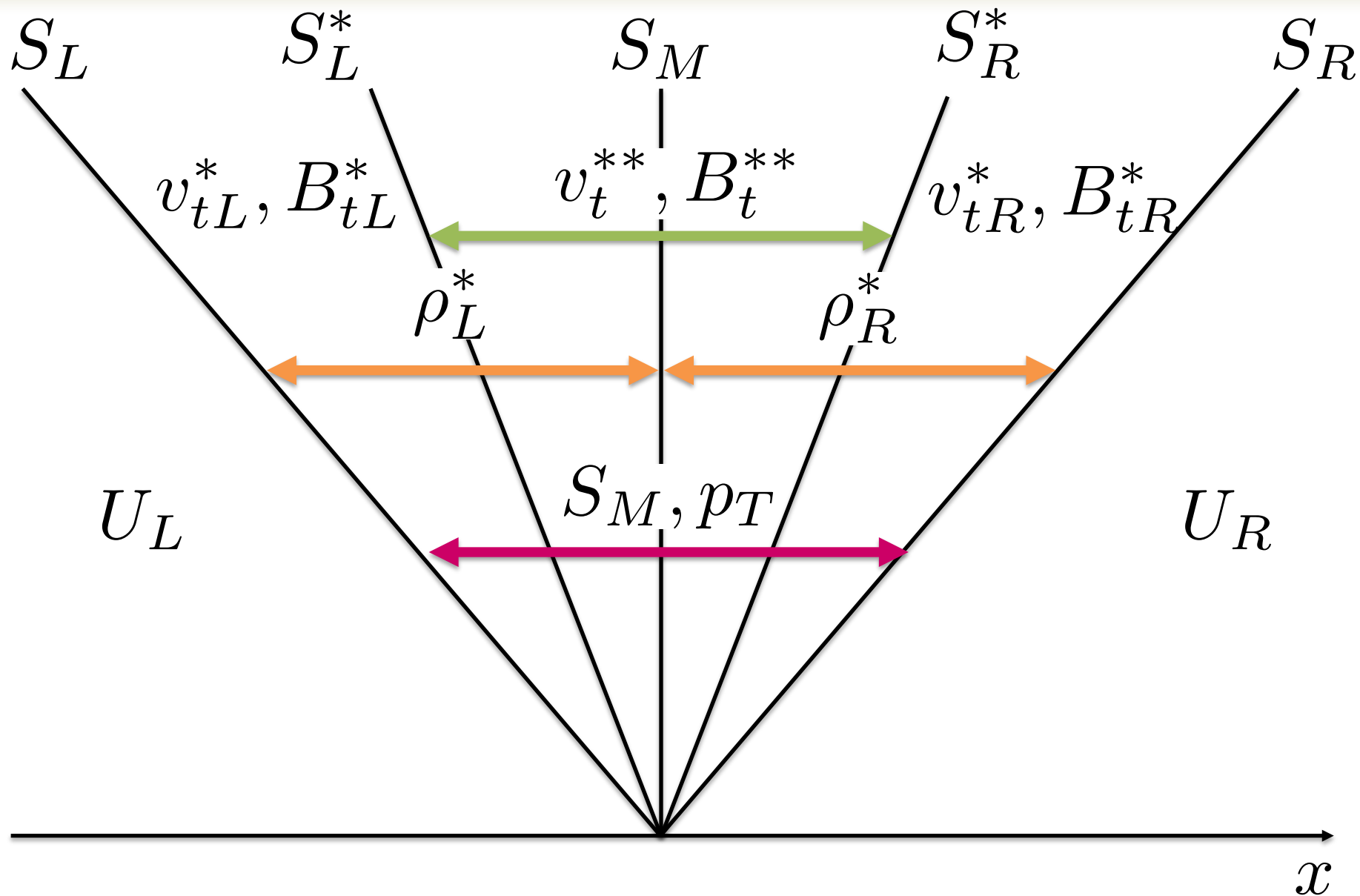
$$S_L^*(\mathbf{U}_L^{**} - \mathbf{U}_L^*) = \mathbf{F}_L^{**} - \mathbf{F}_L^*$$

$$S_M(\mathbf{U}_L^{**} - \mathbf{U}_R^{**}) = \mathbf{F}_L^{**} - \mathbf{F}_R^{**}$$

$$\mathbf{U}_L^* \implies \mathbf{U}_L^{**}$$

右側についても同様に

リーマンファンはこんな感じになる。



具体的な成分

$$u_L^* = u_L^{**} = u_R^{**} = u_R^* = S_M$$

$$p_{T_L}^* = p_{T_L}^{**} = p_{T_R}^{**} = p_{T_R}^* = p_T^*$$

仮定

$$S_M = \frac{(S_R - u_R)\rho_R u_R - (S_L - u_L)\rho_L u_L - p_{T_R} + p_{T_L}}{(S_R - u_R)\rho_R - (S_L - u_L)\rho_L},$$

$$p_T^* = \frac{(S_R - u_R)\rho_R p_{T_L} - (S_L - u_L)\rho_L p_{T_R} + \rho_L \rho_R (S_R - u_R)(S_L - u_L)(u_R - u_L)}{(S_R - u_R)\rho_R - (S_L - u_L)\rho_L}.$$

$$\rho_\alpha^* = \rho_\alpha \frac{S_\alpha - u_\alpha}{S_\alpha - S_M},$$

$$v_\alpha^* = v_\alpha - B_x B_{y_\alpha} \frac{S_M - u_\alpha}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)(S_\alpha - S_M) - B_x^2},$$

$$w_\alpha^* = w_\alpha - B_x B_{z_\alpha} \frac{S_M - u_\alpha}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)(S_\alpha - S_M) - B_x^2},$$

$$B_{y_\alpha}^* = B_{y_\alpha} \frac{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)^2 - B_x^2}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)(S_\alpha - S_M) - B_x^2}.$$

$$B_{z_\alpha}^* = B_{z_\alpha} \frac{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)^2 - B_x^2}{\rho_\alpha (S_\alpha - u_\alpha)(S_\alpha - S_M) - B_x^2}.$$

$$e_\alpha^* = \frac{(S_\alpha - u_\alpha)e_\alpha - p_{T_\alpha} u_\alpha + p_T^* S_M + B_x (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha - \mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*)}{S_\alpha - S_M}.$$

$\alpha = L \text{ or } R$

$$S_L^* = S_M - \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_L^*}}, \quad S_R^* = S_M + \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_R^*}}.$$

仮定

$$p_{T_\alpha}^{**} = p_{T_\alpha}^*.$$

$$\rho_\alpha^{**} = \rho_\alpha^*.$$

$$v^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} v_L^* + \sqrt{\rho_R^*} v_R^* + (B_{y_R}^* - B_{y_L}^*) \text{sign}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}},$$

$$w^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} w_L^* + \sqrt{\rho_R^*} w_R^* + (B_{z_R}^* - B_{z_L}^*) \text{sign}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}},$$

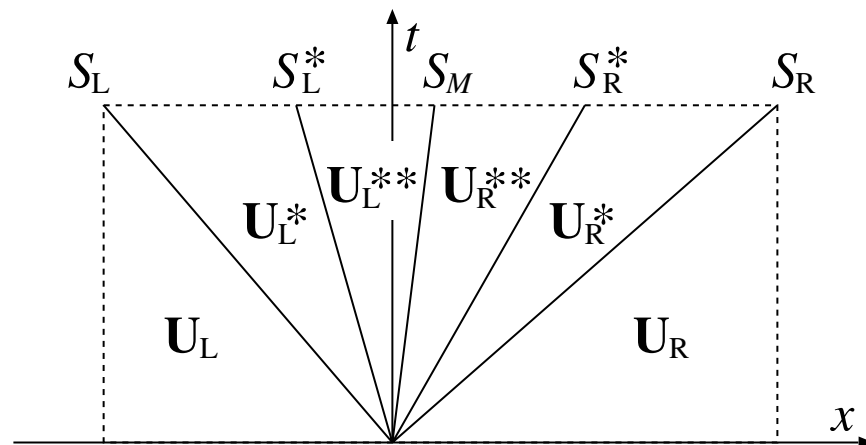
$$B_y^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} B_{y_R}^* + \sqrt{\rho_R^*} B_{y_L}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (v_R^* - v_L^*) \text{sign}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}},$$

$$B_z^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} B_{z_R}^* + \sqrt{\rho_R^*} B_{z_L}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (w_R^* - w_L^*) \text{sign}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}},$$

$$e_\alpha^{**} = e_\alpha^* \mp \sqrt{\rho_\alpha^*} (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^* - \mathbf{v}^{**} \cdot \mathbf{B}^{**}) \text{sign}(B_x),$$

HLLDまとめ

$$\mathbf{F}_{\text{HLLD}} = \begin{cases} \mathbf{F}_L & \text{if } S_L > 0, \\ \mathbf{F}_L^* & \text{if } S_L \leq 0 \leq S_L^*, \\ \mathbf{F}_L^{**} & \text{if } S_L^* \leq 0 \leq S_M, \\ \mathbf{F}_R^{**} & \text{if } S_M \leq 0 \leq S_R^*, \\ \mathbf{F}_R^* & \text{if } S_R^* \leq 0 \leq S_R, \\ \mathbf{F}_R & \text{if } S_R < 0. \end{cases}$$



Jump condition から（またはリーマンファンを積分して）

$$\mathbf{F}_L^* = \mathbf{F}_L + S_L \mathbf{U}_L^* - S_L \mathbf{U}_L$$

$$\mathbf{F}_L^{**} = \mathbf{F}_L + S_L^* \mathbf{U}_L^{**} - (S_L^* - S_L) \mathbf{U}_L^* - S_L \mathbf{U}_L$$

または

$$\mathbf{F}_{\text{HLLD}} = \mathbf{F}(U_\alpha^\beta),$$

$$\alpha = L \text{ or } R,$$

$$\beta = . \text{ or } * \text{ or } **$$

でもよい！

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の問題

物理的な力

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad \text{ローレンツ力}$$

$$= \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \nabla B^2 + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

$$= -\nabla \cdot \left(\frac{B^2}{8\pi} \mathbf{I} - \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}^T}{4\pi} \right)$$

磁気圧勾配 磁気張力

シミュレーションで解く力

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

マクスウェル方程式(アンペールの法則)

磁気圧勾配+磁気張力

$$\frac{1}{4\pi} \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{B})$$

本来存在しない力

$\nabla \cdot B$ の処方箋

- Projection method
 - Poisson 方程式を解き、 $\text{div } B$ に寄与する磁場成分(スカラー場)を差し引く。
 - Poisson 方程式を解くので、重い。
- Constrained Transport (CT) method
 - Staggered grid で、磁場をセル境界で定義する。
 - 丸め誤差の範囲で $\text{div } B = 0$ が保証される。
- 8-wave formulation
 - 8成分目として、 $\text{div } B$ の流れを解く。移流速度はガスの速度と同じ。
 - 簡単な実装だが、ソース項が必要になる。 $\text{div } B$ が溜まる。
- **Hyperbolic divergence cleaning**
 - $\text{div } B$ を等方的に移流させる。同時に、流れを減衰させる。
 - 簡単な実装だが、ソース項が必要になる。

Projection method

$$q = \nabla \cdot B$$

磁荷を求める

$$\nabla^2 \Psi = q$$

Poisson 方程式を解く

$$B^{new} = B - \nabla \Psi$$

磁荷が発生する磁場成分を差し引く

これをMHDが解き終わった後に施す。

解の性質は良いが、Poisson ソルバが重いのが弱点。

Constraint Transport (CT) method

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (v \times B) \quad \text{誘導方程式}$$

ストークスの定理を利用して

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta S} \oint v \times B \cdot dl$$

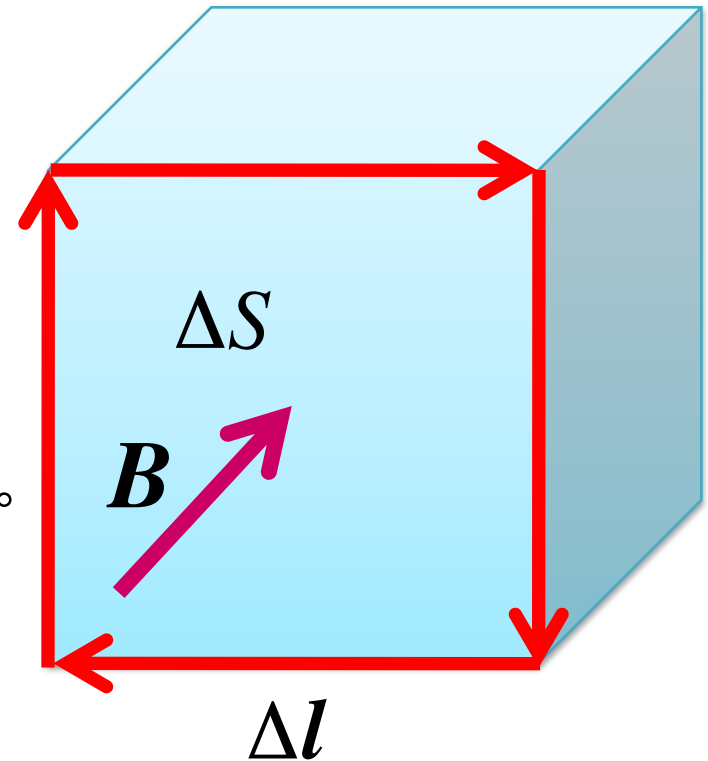
この方程式にしたがって、磁場を時間積分する。
起電力 $v \times B$ を数値流束から流用する。
丸め誤差の範囲で $\nabla \cdot B$ が保存する。

数値流束: セルの面で定義

起電力 $v \times B$: セルの辺で定義

風上性を考慮した内挿が必要。最近良い方法が見つかったらしい。

磁場をセルの面で定義する。



8 waves formulation

$$\begin{aligned}
 \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, \\
 \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T + \left(p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right) \mathcal{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T \right] &= \underline{-(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}}, \\
 \partial_t \mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \mathbf{u}^T) &= \underline{-(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{u}}, \\
 \partial_t e + \nabla \cdot \left[\left(e + p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right) \mathbf{u} - \mathbf{B} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \right] &= \underline{-(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}}.
 \end{aligned} \tag{36}$$

磁荷 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ による力を打ち消すように、ソース項を付加する。

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -(\nabla \cdot \mathbf{B}) u_x$$

$$= -u_x \frac{\partial B_x}{\partial x} - \dots$$

第8の波が現れる。
位相速度は u_x
磁荷 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ を u で運ぶ波。

よどみ点や衝撃波で $\nabla \cdot \mathbf{B}$ が溜まってしまう。

Hyperbolic divergence cleaning

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (24a)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T + \left(p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right) \mathcal{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T \right] = \underline{-(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}}, \quad (24b)$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \mathbf{u}^T + \underline{\psi \mathcal{I}}) = 0, \quad (24c)$$

$$\partial_t e + \nabla \cdot \left[\left(e + p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right) \mathbf{u} - \mathbf{B} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \right] = \underline{-\mathbf{B} \cdot (\nabla \psi)}, \quad (24d)$$

$$\underline{\partial_t \psi + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi}. \quad (24e)$$

c_h と c_p はフリーパラメータ

赤 : mixed GLM formulation による項 (著者のお勧め)
橙 : EGLM formulation による項

固有値は9個

$$\lambda_1 = -c_h, \quad \lambda_2 = u_x - c_f, \quad \lambda_3 = u_x - c_a, \quad \lambda_4 = u_x - c_s, \quad \lambda_5 = u_x,$$

$$\lambda_6 = u_x + c_s, \quad \lambda_7 = u_x + c_a, \quad \lambda_8 = u_x + c_f, \quad \lambda_9 = c_h.$$

詳細は Dedner, Kemm, Kroner, Munz, Schnitzer, Wesenberg, 2002, JCP, 175, 645

2つの波(方程式)が追加; 7 + 2 waves

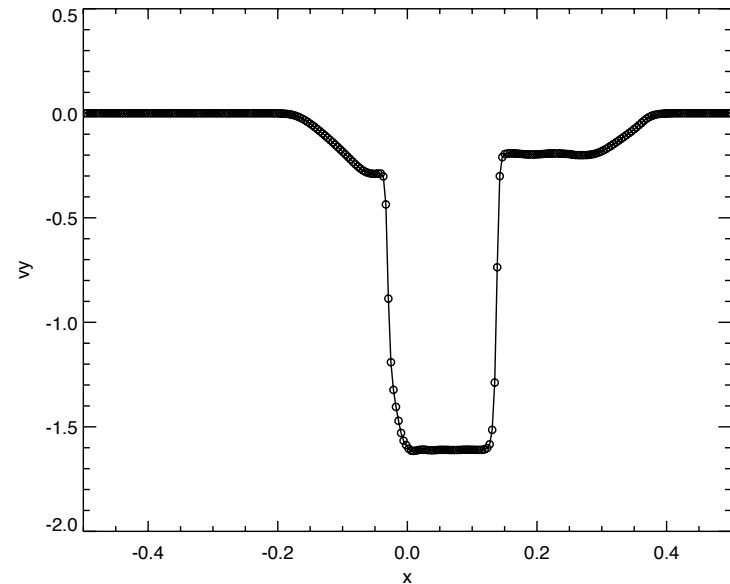
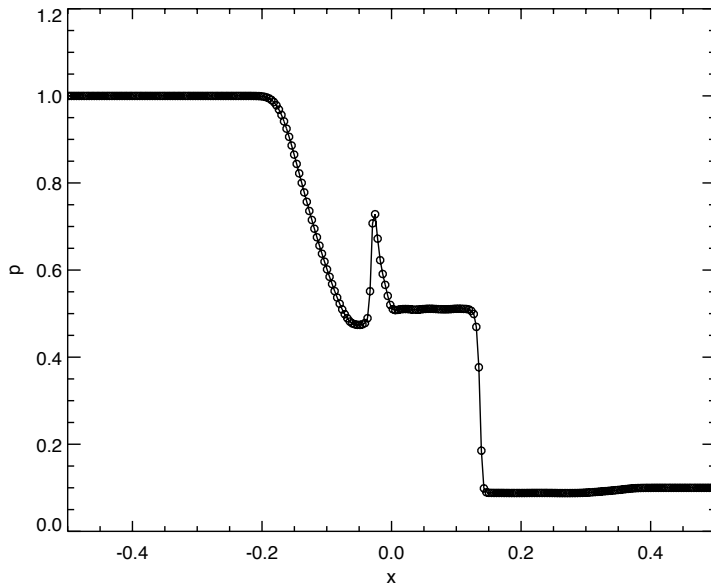
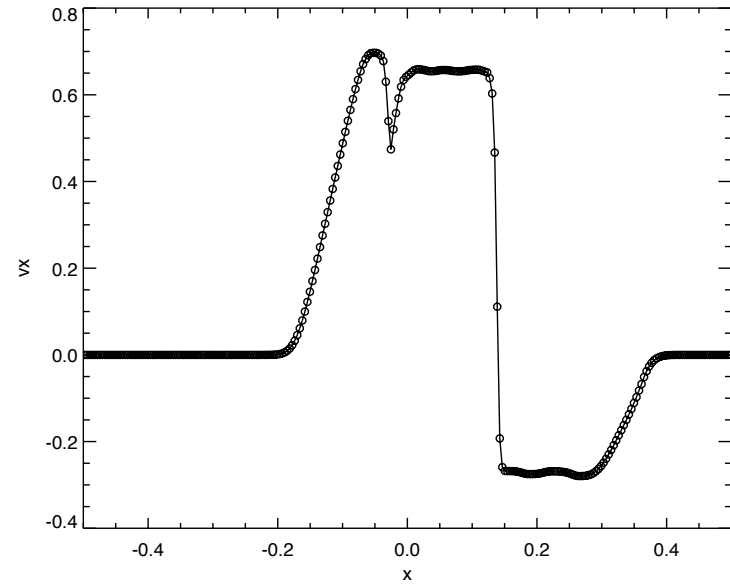
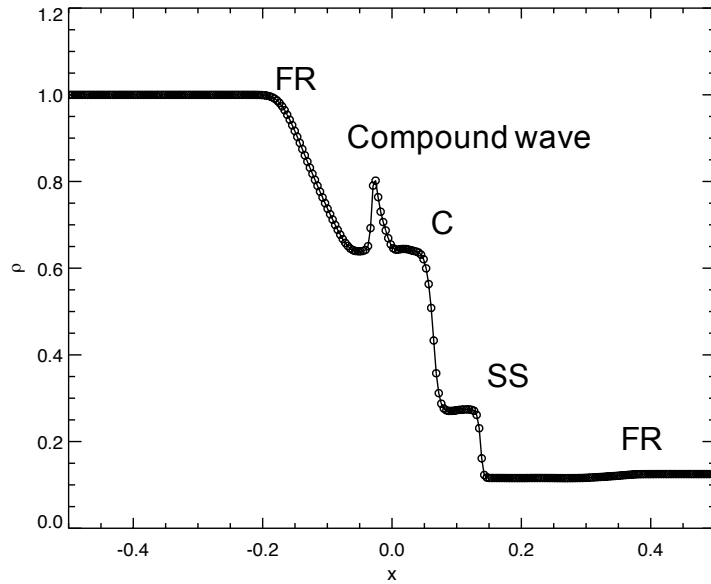
$$\partial_t B_x + \partial_x \psi = 0,$$

$$\partial_t \psi + c_h^2 \partial_x B_x = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi.$$

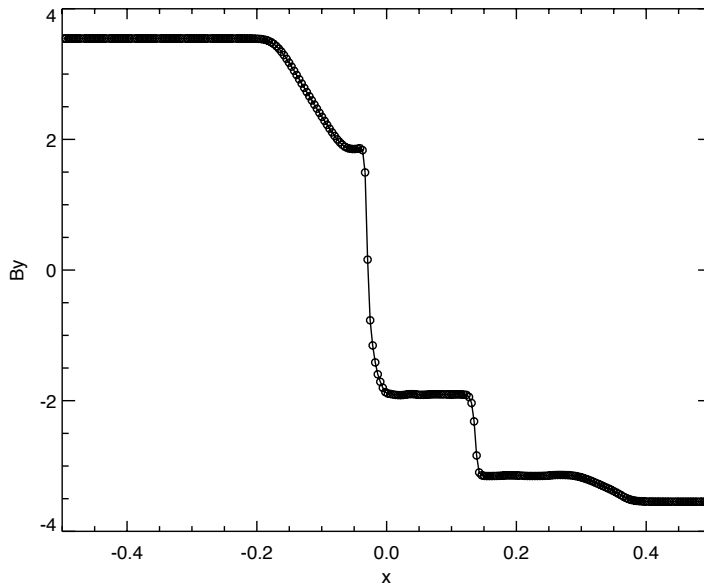
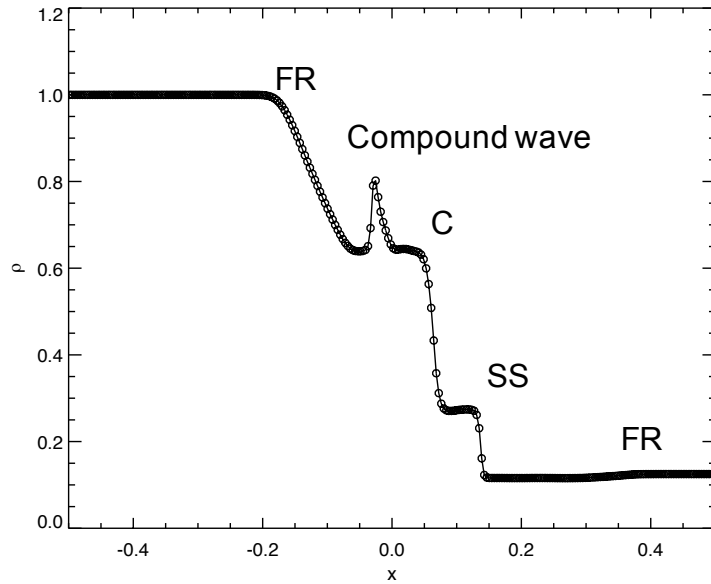
B_x と ψ の波動方程式

ψ の減衰

Burio & Wu (1988) shock tube problem



Burio & Wu (1988) shock tube problem



Burio & Wu (1988) shock tube problem

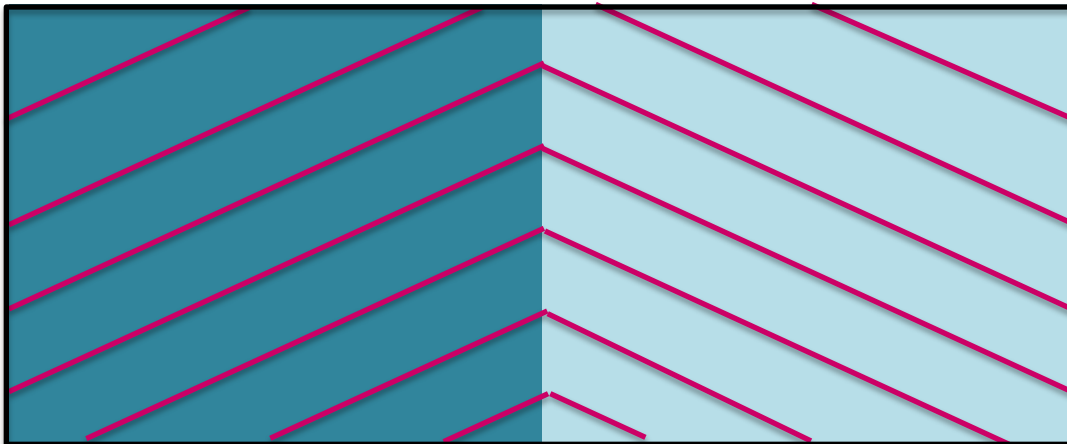
$$x \in [-0.5, 0.5],$$

$$t = 0.1,$$

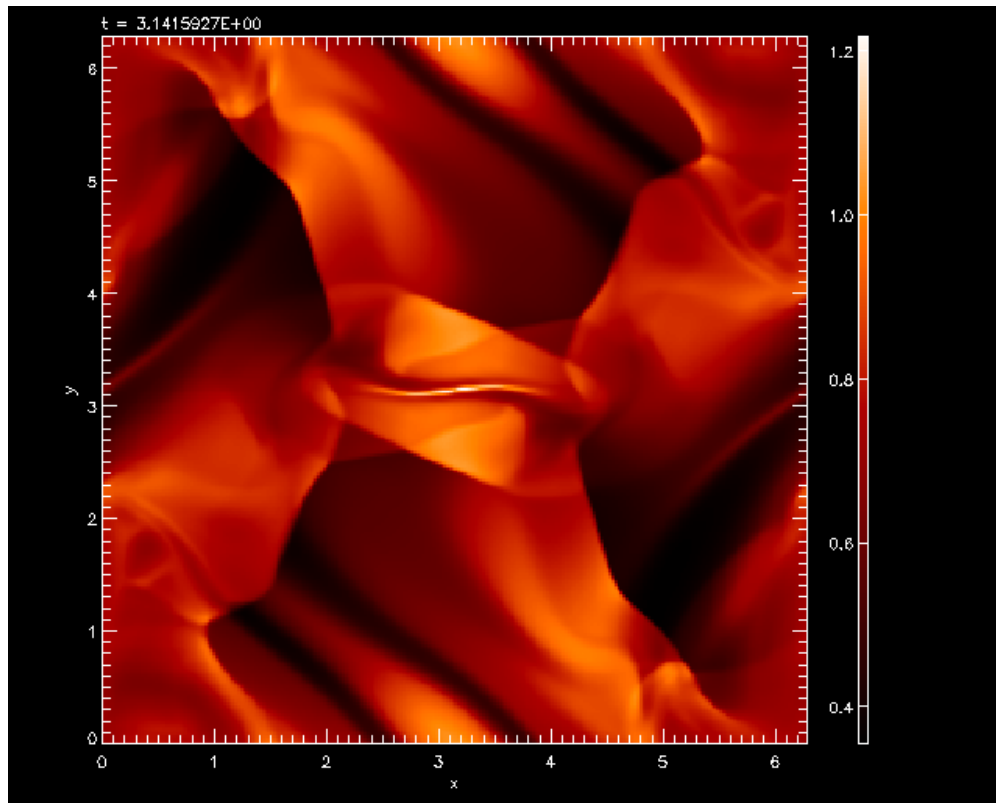
$$B_x = 0.75\sqrt{4\pi},$$

$$\begin{pmatrix} \rho \\ p \\ u \\ v \\ w \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{4\pi} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \rho \\ p \\ u \\ v \\ w \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{4\pi} \\ 0 \end{pmatrix}$$



Orzag-Tang (1979) vortex problem



温度分布 p/ρ

$$x, y \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi],$$

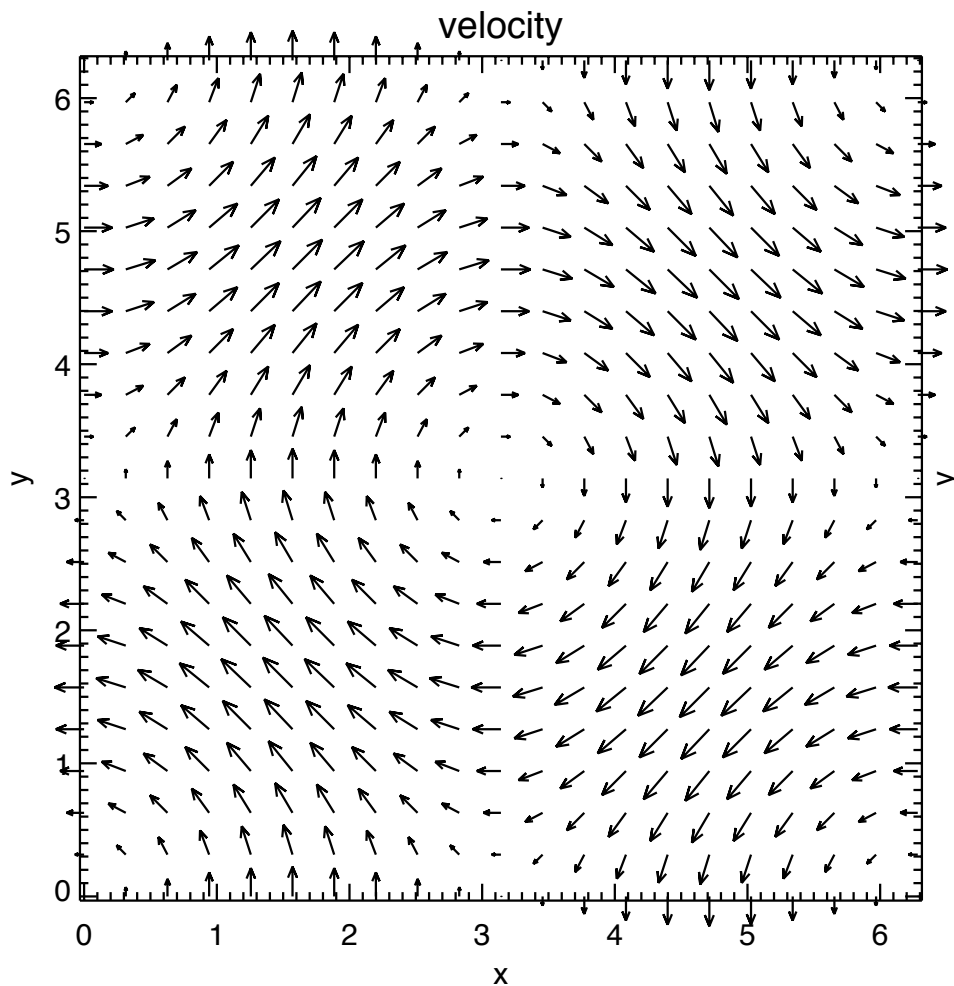
$$t = \pi,$$

$$\begin{pmatrix} \rho \\ p \\ u \\ v \\ w \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2 \\ \gamma \\ -\sin y \\ \sin x \\ 0 \\ -\sqrt{4\pi} \sin y \\ \sqrt{4\pi} \sin 2x \\ 0 \end{pmatrix},$$

回轉
回轉

Orzag-Tang (1979) vortex problem

初期条件の速度



初期条件の磁場

